Chapitre 4

Dépasser ses limites Partie 2 : Les fonctions

Hors Sujet

Titre : « Flower Chucker »

Auteur : Banksy-Pochoiriste

Présentation succinte de l'auteur : Il combine les techniques du graffiti et du pochoir pour faire passer ses messages, qui mêlent souvent politique, humour et poésie comme Ernest Pignon-Ernest ou Blek le rat. Les pochoirs de Banksy sont des images humoristiques, parfois combinés avec des slogans. Le message est généralement antimilitariste, anticapitaliste ou antisystème. Ses personnages sont souvent des rats, des singes, des policiers, des soldats, des enfants ou des personnes âgées.

Il s'est forgé une certaine notoriété dans les milieux alternatifs et les médias traditionnels s'intéressent aussi à lui. Il a notamment travaillé sur le film Les Fils de l'homme2 et a réalisé en 2003 la pochette du disque de Blur, Think Tank.

Banksy a fondé le projet « Santa's Ghetto » en réalisant des peintures sur le mur de Gaza afin de redonner espoir aux habitants palestiniens et israéliens. Aidé par d'autres artistes, comme Ron English, un Américain, le mur de séparation prend petit à petit les couleurs d'une toile artistique géante, comme avec l'image de la petite Vietnamienne brûlée au napalm qui tient par la main Mickey Mouse et Ronald McDonald.

Concernant ce projet, Banksy raconte dans son livre Wall and Piece, qu'un jour, alors qu'il peignait sur le mur de séparation, un habitant est venu lui dire : « vous embellissez le mur ». Banksy, flatté : « Merci, c'est gentil », fut aussitôt coupé par le vieil homme : « On ne veut pas que ce mur soit beau, on ne veut pas de ce mur, rentrez chez vous ».

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : C. Aupérin
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée : Jules Fil (Carcassonne)

Table des matières

L'ESSENTIEL :

- $\rightsquigarrow$ Connaître les diverses limites de fonctions
- $\rightsquigarrow$ Maîtriser les méthode pour lever des indétermination de limite
- $\rightsquigarrow$ Montrer qu'une droite est une asymptote

« *Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous* »
THURSTON MOORE (SONIC YOUTH)

DÉPASSER SES LIMITES

PARTIE 2 : LES FONCTIONS

Résumé

Ce chapitre étend simplement la notion de limite étudiée pour les suites. Il s'agit d'une bonne occasion pour réviser et revoir les méthodes employées.
Cependant, ce chapitre est essentiel pour découvrir la suite du programme, et servira à toute étude de fonction digne de ce nom. Il n'est donc pas à négliger.

Toutes les fonctions considérées dans ce chapitre sont définies sur $\mathbb{R}$ ou sur une partie de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Les intervalles considérées sont non vides et non réduit à un réel.

I) Limite d'une fonction

On étend ici aux fonctions la notion de limite étudié pour les suites

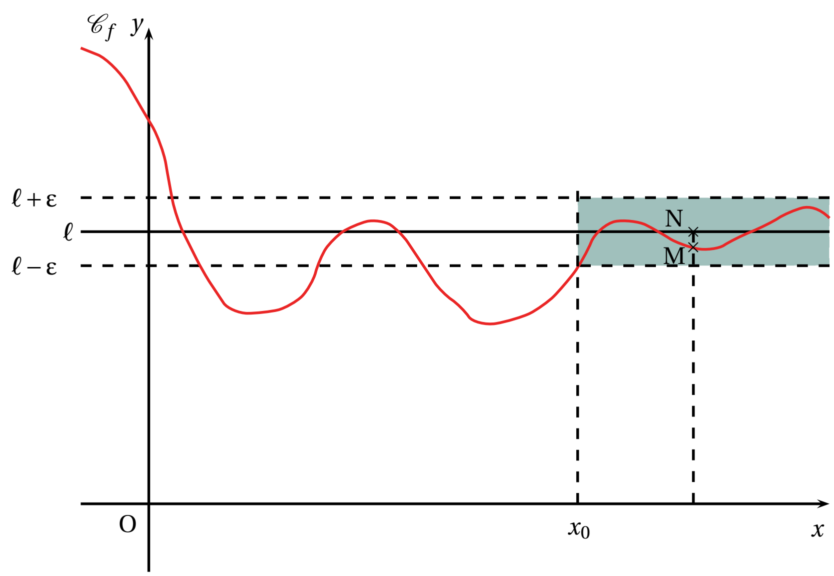
I.1. Limite finie en l'infini

Définition 1.

Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $]a;+\infty[$ et un réel ℓ.
On dit que f **admet pour limite ℓ (ou tend vers ℓ) quand x tend vers** $+\infty$, lorsque tout intervalle ouvert I contenant ℓ (aussi petit soit-il) contient aussi toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand et on note :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$$

On dit que la droite d'équation $y = \ell$ est **asymptote hoizontale** à la courbe représentative de f en $+\infty$.



Remarques :

⇝ Cela signifie que la distance entre $f(x)$ et ℓ, ie $|f(x)-\ell| = \mathrm{MN}$, peut être rendue aussi petite que l'on veut dès que x est assez grand, ie :

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists x_0\in\mathbb{R},\quad \forall x>x_0,\quad |f(x)-\ell|<\varepsilon \iff \lim_{x\to+\infty}|f(x)-\ell| = 0$$

⇝ Graphiquement, la courbe représentative se rapproche autant que l'on veut de la droite d'équation $y = \ell$.

⇝ On définit de même $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$, et l'asymptote horizontale en $-\infty$, avec $-x$ assez grand, ou encore x « assez grand dans les négatifs » :

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists x_0\in\mathbb{R},\quad \forall x<x_0,\quad |f(x)-\ell|<\varepsilon \iff \lim_{x\to-\infty}|f(x)-\ell| = 0$$

En pratique :

- $\rightsquigarrow$ On conjecture la valeur de ℓ à la calculatrice
- $\rightsquigarrow$ On écrit $|f(x)-\ell|$ sans valeur absolue, en fonction de x
- $\rightsquigarrow$ On pose $\varepsilon > 0$ et on résout l'inéquation $|f(x)-\ell| < \varepsilon$
- $\rightsquigarrow$ On conclut.

Exemple :

Montrons que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, ie montrons que si $\varepsilon > 0$ alors il existe une valeur x_0 telle que pour tout $x > x_0$ on a $|f(x)-0| < \varepsilon$.

Pour cela, considérons $\varepsilon > 0$ et trouvons tel un réel x_0 (cela montrera donc qu'il en existe un).
Remarquons déjà que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, on a $f(x)-0 = \dfrac{1}{x} > 0$. Donc $|f(x)-0| = \dfrac{1}{x}$.
Ne considérer que le car $x > 0$ suffit car x tend vers $+\infty$
Ainsi :

$$|f(x)-0| < \varepsilon \overset{x>0}{\iff} \frac{1}{x} < \varepsilon \iff x > \frac{1}{\varepsilon}$$

Donc, il suffit de choisir $x_0 = \dfrac{1}{\varepsilon} > 0$, et on a bien que $\forall x > x_0, \quad |f(x)-0| < \varepsilon$. D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

On a de même $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. En effet, $\forall x \in \mathbb{R}^{-*}$, on a $f(x)-0 = \dfrac{1}{x} < 0$. Donc $|f(x)-0| = -\dfrac{1}{x}$ et :

$$|f(x)-0| < \varepsilon \overset{x<0}{\iff} -\frac{1}{x} < \varepsilon \iff x < -\frac{1}{\varepsilon}$$

Ainsi, il suffit de choisir $x_0 = -\dfrac{1}{\varepsilon} < 0$, et on a bien que $\forall x < x_0, \quad |f(x)-0| < \varepsilon$. D'où $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

La droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction inverse en $+\infty$ et en $-\infty$.

I.2. Limite infini en l'infini

Définition 2.

Une fonction f **tend vers** :

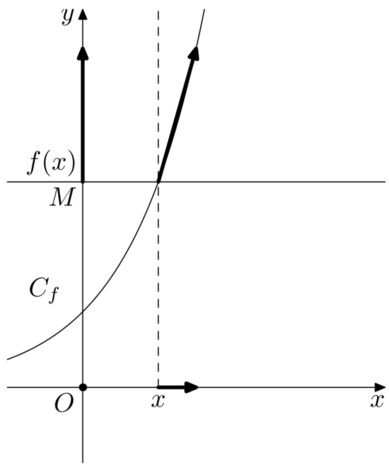
- $\rightsquigarrow$ $+\infty$ **quand** x **tend vers** $+\infty$, lorsque tout intervalle du type $]\mathrm{A};+\infty[$, avec $\mathrm{A} \in \mathbb{R}$, contient toutes les images $f(x)$ pour x assez grand et on note :

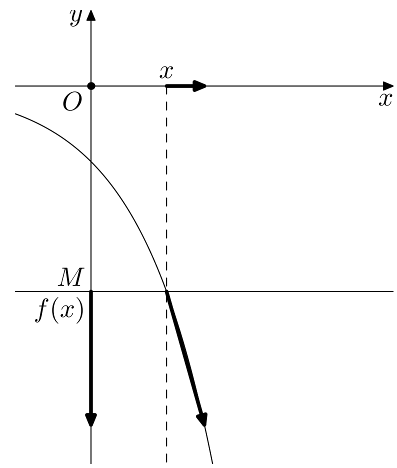
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

- $\rightsquigarrow$ $-\infty$ **quand** x **tend vers** $+\infty$, lorsque tout intervalle du type $]-\infty;\mathrm{A}[$, avec $\mathrm{A} \in \mathbb{R}$, contient toutes les images $f(x)$ pour x assez grand et on note :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

Illustrations :





Remarques :

⇝ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ signifie que $f(x)$, peut être rendu aussi grand que l'on veut dès que x est assez grand, ie :

$$\forall \mathrm{A}, \quad \exists x_0 \in \mathbb{R}, \quad \forall x > x_0, \quad f(x) > \mathrm{A}$$

⇝ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ signifie que $f(x)$, peut être rendu aussi grand que l'on veut « dans les négatifs » dès que x est assez grand, ie :

$$\forall \mathrm{A}, \quad \exists x_0 \in \mathbb{R}, \quad \forall x > x_0, \quad f(x) < \mathrm{A}$$

⇝ Les définitions de limite quand x tend vers $-\infty$ sont analogues aux précédentes, avec x « assez grand dans les négatifs »

Exemple :

Montrons que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, ie montrons que si $\mathrm{A} \in \mathbb{R}$ alors il existe une valeur x_0 telle que pour tout $x > x_0$ on a $f(x) > \mathrm{A}$.
Pour cela, considérons $\mathrm{A} \in \mathbb{R}$ et trouvons un tel x_0 (cela montrera donc qu'il en existe un).

Remarquons déjà que si $\mathrm{A} < 0$, on peut choisir n'importe quelle valeur pour x_0 car $f(x) > \mathrm{A}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Ce cas est souvent omis, car toujours trivial.
Si $\mathrm{A} \geq 0$, on a $\quad f(x) > \mathrm{A} \Longleftrightarrow x^2 > \mathrm{A} \overset{x>0}{\Longleftrightarrow} x > \sqrt{\mathrm{A}}$
Ne considérer que le cas $x > 0$ suffit, car x tend vers $+\infty$
Ainsi, il suffit de choisir $x_0 = \sqrt{\mathrm{A}} > 0$, et on a bien que $\forall x > x_0, \quad f(x) > \mathrm{A}$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$

On a de même $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ car $\forall x \in \mathbb{R}^-$, on a $\quad f(x) > \mathrm{A} \Longleftrightarrow x^2 > \mathrm{A} \overset{x<0}{\Longleftrightarrow} x < -\sqrt{\mathrm{A}}$.
Ainsi, il suffit de choisir $x_0 = -\sqrt{\mathrm{A}} < 0$, et on a bien que $\forall x < x_0, \quad f(x) > \mathrm{A}$

Exemple :

Déterminer les limites éventuelles de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x^3$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

I.3. Limite en un réel a

Définition 3.

Une fonction f **tend vers** :

⇝ **un réel ℓ quand x tend vers un réel** a, lorsque pour tout intervalle ouvert contenant ℓ, contient aussi toutes les valeurs de $f(x)$ pour tout réel x assez proche de a. On note :

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell$$

⇝ $+\infty$ **quand x tend vers un réel** a, lorsque pour tout intervalle du type $]\lambda;+\infty[$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour tout réel x assez proche de a. On note :

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$$

⇝ $-\infty$ **quand x tend vers un réel** a, lorsque pour tout intervalle du type $]-\infty;\lambda[$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour tout réel x assez proche de a. On note :

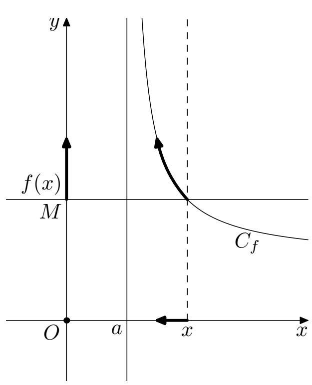
$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$$

Dans tous les cas, on définit la limite de f en a **à droite** (respectivement **à gauche**) de manière analogue, en considérant x assez proche de a mais restant strictement supérieur à a (respectivement inférieur).
On note :

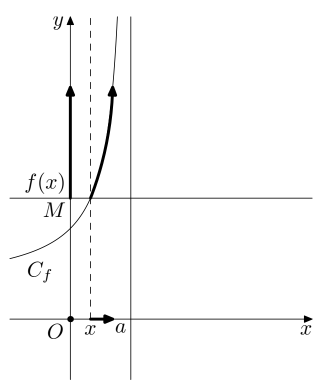
$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x)$$

Illustrations :

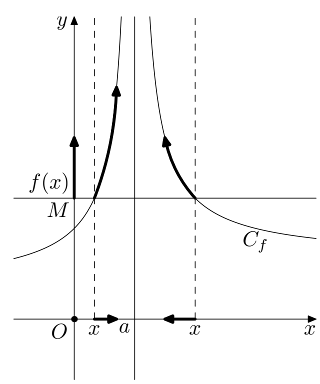
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$$



Définition 4.

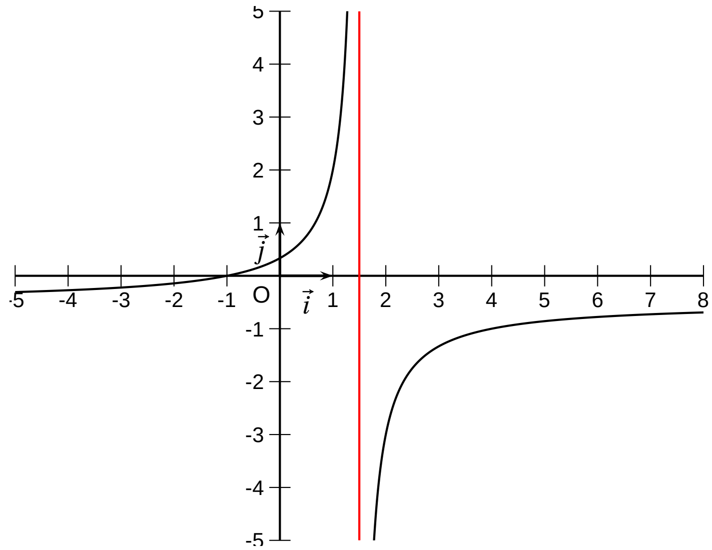
Lorsque f admet pour limite $+\infty$ ou $-\infty$ en un réel a (ou en a à droite, ou en a à gauche), on dit que la droite d'équation $x = a$ est **asymptote verticale** à la courbe représentative de f.

Exemple :

Soit g définie sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{3}{2}\right\}$ par $g(x)=\frac{1+x}{3-2x}$.
On ne sait pas encore le montrer rigoureusement, mais on peut tout de même conjecturer que

$$\lim_{x\to\frac{3}{2}^+} g(x)=-\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to\frac{3}{2}^-} g(x)=+\infty$$

La droite d'équation $x=\frac{3}{2}$ est asymptote verticale à la courbe représentative de g.



Remarques :

- La limite d'une fonction, si elle existe, est unique.
- Ecrire $\lim_{x\to a} f(x)=\ell$ avec $a\in \mathrm{D}_f$ et $\ell\in\mathbb{R}$ sous-entend $\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)=\ell$
- Vous commencez à vous habituer à ces définitions, mais leur usage reste compliqué. Rassurez-vous, vous ne serez pas toujours obligés d'y revenir pour calculer des limites. Il existe des théorèmes analogues à ceux sur les suites, bien plus manipulables.

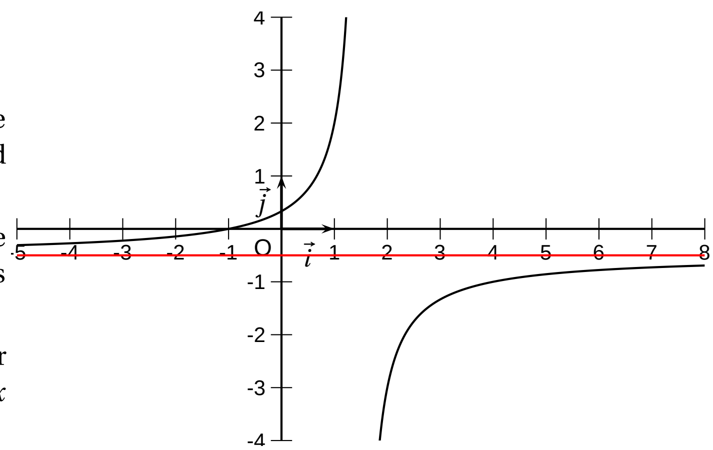
Exercice(s) du livre : Déclic : n° 44 à 46 p 72 (aspect graphique)
n° 48 p 72 (limite en un réel avec la définition)
n° 49 p 73 (fonction n'ayant pas de limite en un point)

II) Déterminer une limite

II.1. Limites et opérations

Travail de l'élève **1.** Soit g définie sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{3}{2}\right\}$ par $g(x)=\frac{1+x}{3-2x}$.

1. Trouver avec la définition la limite éventuelle de la foncion g quand x tend vers $+\infty$ puis quand x tend vers $-\infty$.
2. Retrouver ces résultats en supposant que toutes les propriétés des limites sur les suites sont valables pour les fonctions.
3. Toujours en utilisant ces règles, déterminer les limites à droite et à gauche de g quand x tend vers $\frac{3}{2}$.



Solution :

1. A la calculatrice, on conjecture $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\frac{1}{2}$.

Remarquons déjà que $\forall x > \frac{3}{2}$ on a $g(x) - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1+x}{3-2x} + \frac{1}{2} = \frac{2(1+x)+(3-2x)}{2(3-2x)} = \frac{5}{2(3-2x)} < 0$.

Donc on a $\left|g(x) - \left(-\frac{1}{2}\right)\right| = -\frac{5}{2(3-2x)}$ et :

$$\begin{aligned}
\left|g(x) - \left(-\frac{1}{2}\right)\right| < \varepsilon &\iff -\frac{5}{2(3-2x)} < \varepsilon \\
&\iff -\frac{2(3-2x)}{5} > \frac{1}{\varepsilon} \\
&\iff 3-2x < -\frac{5}{2\varepsilon} \\
&\iff -2x < -\frac{5}{2\varepsilon} - 3 \\
&\iff -2x < -\frac{5+6\varepsilon}{2\varepsilon} \\
&\iff x > \frac{5+6\varepsilon}{4\varepsilon}
\end{aligned}$$

Ainsi, dès que $x > x_0$ avec $x_0 = \frac{5+6\varepsilon}{4\varepsilon}$, on a $\left|g(x) - \left(-\frac{1}{2}\right)\right| < \varepsilon$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\frac{1}{2}$.

On procède de même pour montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\frac{1}{2}$:

- ⇝ On constate que $\forall x < \frac{3}{2}$ on a $\left|g(x) - \left(-\frac{1}{2}\right)\right| = \frac{5}{2(3-2x)}$
- ⇝ On résout donc l'inéquation $\frac{5}{2(3-2x)} < \varepsilon \iff x < \frac{5-6\varepsilon}{4\varepsilon}$.
- ⇝ Ainsi, dès que $x < x_0$ avec $x_0 = \frac{5-6\varepsilon}{4\varepsilon}$, on a $\left|g(x) - \left(-\frac{1}{2}\right)\right| < \varepsilon$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\frac{1}{2}$.

La droite d'équation $y = -\frac{1}{2}$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de g en $+\infty$ et $-\infty$.

2. $g(x) = \frac{1+x}{3-2x} = \frac{x\left(\frac{1}{x}+1\right)}{x\left(\frac{3}{x}-2\right)} = \frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{3}{x}-2}$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}+1 = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{x}-2 = -2$. Par quotient on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\frac{1}{2}$

De même $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x}+1 = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3}{x}-2 = -2$. Par quotient on obtient $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\frac{1}{2}$

3. On a $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}} 1+x = \frac{5}{2}$ et $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}^+} 3-2x = 0^-$. Ainsi, par quotient on obtient $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}^+} g(x) = -\infty$.

Comme $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}^-} 3-2x = 0^+$. Ainsi, par quotient on obtient $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}^-} g(x) = +\infty$.

Conclusion

Les résultats sur les calculs de limites pour les suites restent valables pour les limites de fonctions.

Propriété 1. (Quelques limites à connaître)

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0 \qquad \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty \qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}x^2=+\infty \qquad \lim_{x\to+\infty}x^3=+\infty \qquad \lim_{x\to-\infty}x^3=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty \qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$$

Remarque : Les courbes représentatives de chacune sont un bon moyen pour retenir les limites.

Propriété 2. (Opérations sur les limites)

Les règles d'opérations sur les limites pour les suites restent valables pour les fonctions, qu'il s'agisse de limite en l'infini ou en un réel. Rappelons tout de même les quatre formes indéterminées :

$$\text{« } 0\times\infty \text{ »} \qquad \text{« } \frac{0}{0} \text{ »} \qquad \text{« } \frac{\infty}{\infty} \text{ »} \qquad \text{« } \infty-\infty \text{ »}$$

Remarque : Lorsque l'on a une forme indéterminée, l'idée est de changer l'écriture de l'expression en factorisant ou en développant, suivant l'écriture initiale.

Exemples :

Déterminer les limites des fonctions suivantes :

1. $g : x \longmapsto \dfrac{3+x}{2-x}$ en $+\infty$, $-\infty$, en -3 et en 2.
2. $h : x \longmapsto \dfrac{3+x}{(2-x)^2}$ en $+\infty$, $-\infty$, en -3 et en 2.
3. $k : x \longmapsto \dfrac{2x-2}{x^2+x-2}$ en -3, en -2 et en 1.

II.2. Composée de deux fonctions

Pour décrire une fonction, on peut parfois la décomposer en enchaînements de fonctions plus simples. Par exemple, pouvez-vous décomposer la fonction $\Phi : x \mapsto \sqrt{-3x+1}$ en deux fonctions élémentaires ?
Supposons que vous vouliez étudier la limite de ϕ en $-\infty$. Que pourriez vous faire ?

Définition 5.

Soient deux fonctions f et g définies sur deux ensembles I et J tels que l'image de J par g est contenue dans I : $g(\mathrm{J})\subset\mathrm{I}$.
La fonction obtenue en appliquant successivement g puis f, s'appelle la composée de g par f et est notée $f\circ g$.
Ainsi, pour tout réel $x\in\mathrm{J}$ on a $f\circ g(x)=f\left(g(x)\right)$.

Théorème 1. (admis)

Soient deux fonctions f et g, et a, b, ℓ des nombres réels, ou éventuellement $+\infty$, ou $-\infty$.
Si on a $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$ et $\lim\limits_{X\to b} f(X) = \ell$, alors :

$$\lim_{x\to a} f\circ g(x) = \ell$$

Preuve **Hors Programme**

Raisonnons dans le cas où $a = +\infty$, $b = -\infty$ et $\ell \in \mathbb{R}$ Soit I un intervalle ouvert qui contient ℓ.
Comme $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \ell$, I contient tous les réels $f(x)$ pour x strictement inférieur à un certain x_0.
De plus, comme $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = -\infty$, l'intervalle ouvert $]-\infty; x_0[$ contient tous les réels $g(x)$ pour x supérieur à un certain réel x_1.
Si $x > x_1$, on a alors $g(x) < x_0$, et donc $f(g(x)) \in \mathrm{I}$ i.e $f\circ g(x) \in \mathrm{I}$
Ainsi tout intervalle ouvert I qui contient ℓ contient aussi tous les réels $f\circ g(x)$ pour x assez grand ; ce qui signifie que

$$\lim_{x\to +\infty} f\circ g(x) = \ell$$

Remarque : Ce théorème reste identique si $v_n = f(u_n)$.

Exemples :

1. Calculer la limite en $+\infty$ de la fonction $f : x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right) + 5$.
2. Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{\frac{4x+1}{x+1}}$$

et (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \sqrt{\frac{2^{n+2}+1}{2^n+1}}$
Déterminer la limite éventuelle de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ et démontrer que la suite (v_n) est convergente, préciser sa limite.

Solution **:**

1. On a $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{X\to 0} \sin(X) + 5 = 0 + 5 = 5$ donc $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 5$
2. Pour $x > 0$, on a $f(x) = \sqrt{X}$ avec $X = \frac{4x+1}{x+1}$.
   On a $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{4x+1}{x+1} = \frac{4x}{x} = 4$ (*fonction rationnelle en* $+\infty$) et $\lim\limits_{X\to 4} \sqrt{X} = 2$ donc :

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 2$$

   De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n = f(u_n)$ avec $u_n = 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Or, $\lim\limits_{n\to +\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to +\infty} f(X) = 2$, donc $\boxed{\lim\limits_{n\to +\infty} v_n = 2}$

Exercice(s) du livre : Déclic : n° 52 p 73 (opérations et composée à partir d'un tableau de variations) n° 61 p 74 (étude d'une fonction rationnelle) n° 64-65 p 74 (limite de composée)

II.3. Limites et comparaison

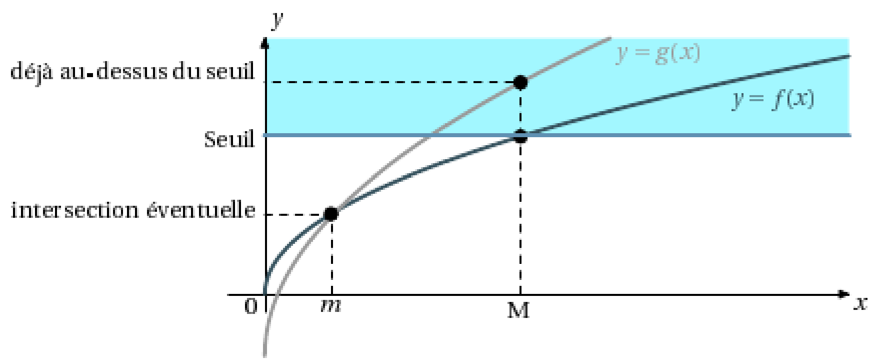
On dispose de théorèmes analogues à ceux déjà vus sur les suites.

Théorème 2. (de comparaison)

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle du type $]a;+\infty[$, telles que pour tout $x > a$ on a $f(x) \leq g(x)$.

⇝ Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

⇝ Si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$



Preuve

⇝ Soit $\mathrm{A} \in \mathbb{R}$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ il existe un réel x_0 tel que $f(x) > \mathrm{A}$ à partir de x_0.

Par conséquent pour $x > max(x_0; a)$ $\mathrm{A} < f(x) \leq g(x)$ ce qui prouve que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

⇝ Soit $\mathrm{A} \in \mathbb{R}$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} vgx) = -\infty$ il existe un réel x_0 tel que $g(x) < \mathrm{A}$ à partir de x_0.

Par conséquent pour $x > max(x_0; a)$ $f(x) \leq g(x) < \mathrm{A}$ ce qui prouve que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

Remarque : Il existe des théorèmes analogues pour des limites en $-\infty$ et en $a \in \mathbb{R}$

Exemple :

1. Soit $f(x) = -x + \sin x$. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2. Soit $g(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}$. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$

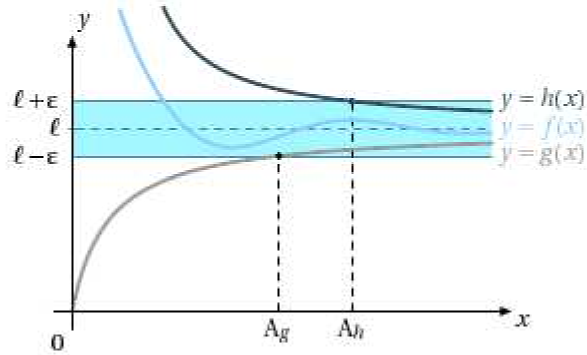
Théorème 3. (Théorème des gendarmes)

Soient f, g et h des fonctions définies sur un intervalle du type $]a;+\infty[$ et $\ell \in \mathbb{R}$ telles que :

1. pour tout $x > a$ on a $g(x) \leq f(x) \leq g(x)$.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \ell$

Alors f admet pour limite ℓ en $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$$



Preuve

Soit I un intervalle ouvert contenant ℓ. Il s'agit de démontrer que I contient tous les réels $f(x)$ à partir d'un certain x_0.

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \ell$, i.e qu'il existe x_1 tel que $g(x) \in \mathrm{I}$ à partir de x_1 et il existe un réel x_2 tel que $h(x) \in \mathrm{I}$ à partir de x_2.

Soit $x_0 = max(a, x_1; x_2)$. Si $x > x_0$, l'intervalle I contient $g(x)$ et $h(x)$, donc il contient aussi tous les réels compris entre $g(x)$ et $h(x)$, en particulier il contient $f(x)$, ainsi :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$$

Remarque : Il existe des théorèmes analogues pour des limites en $-\infty$ et en $a \in \mathbb{R}$

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \dfrac{2+3\sin x}{x}$. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Exercice(s) du livre : Déclic : n° 70-71 p 75 (comparaison)