Chapitre 11

Les maths : l'intégrale !

Hors Sujet

Titre : « Black Swan »

Auteur : Darren Aronofsky

Présentation succinte de l'auteur : Darren Aronofsky est né le 12 février 1969 dans une famille juive de New York. Il s'intéresse assez vite à l'art et entre à l'université Harvard pour étudier les techniques de réalisation et d'animation. Il y fait la rencontre de Sean Gullette avec qui il tourne son court métrage de fin d'études, Supermarket Sweep. En février 1996, il parvient à rassembler les 60 000 dollars nécessaires pour la réalisation de son premier long métrage, π, qui sera un véritable succès, remportant de nombreux prix et souvent classé parmi les 10 meilleurs films de l'année. Il enchaîne en 2000 avec Requiem for a dream, adaptation du roman éponyme de Hubert Selby : un film choc sur l'addiction sous toutes ses formes, montrant la décadence infernale d'un quatuor noyant son quotidien dans des visions faussées du paradis et de la célébrité, avec Jared Leto, Jennifer Connelly, Ellen Burstyn et Marlon Wayans.

En 2010, il sort Black Swan avec Natalie Portman, Vincent Cassel, Mila Kunis, Barbara Hershey et Winona Ryder, qui connaît lui aussi un grand succès et gagne de nombreux prix, notamment l'Oscar 2011 de la meilleure actrice pour Natalie Portman.

Au sujet de Black Swan : « Ce n'est donc pas par plaisir sadique ou goût de la manipulation qu'Aronofsky filme cette descente aux enfers. Il a une vraie obsession, qui lui tient à coeur, et qui le pousse à filmer : la quête de la perfection. » (Cahier du cinéma)

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : C. Aupérin
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée Jules Fil (Carcassonne)

Table des matières

L'ESSENTIEL :

$\rightsquigarrow$

« *Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous* »
THURSTON MOORE (SONIC YOUTH)

LES MATHS : L'INTÉGRALE !

Résumé

Le calcul intégrale est l'outil permettant de déterminer l'aire de forme géométrique nouvelle. On verra que l'aire sous la courbe d'une fonction est lié à la notion de dérivée, il s'agit en quelque sorte du problème inverse puisqu'on est ramené à la recherche de primitive pour calculer cette aire. Le rapport avec la dérivée n'est pas des plus étonnants, puisqu'il mesure le degré de courbure de la courbe en tout point, information qui parait nécessaire pour calculer l'aire sous cette courbe.

Dans tout le chapitre on considère un plan P muni dun repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

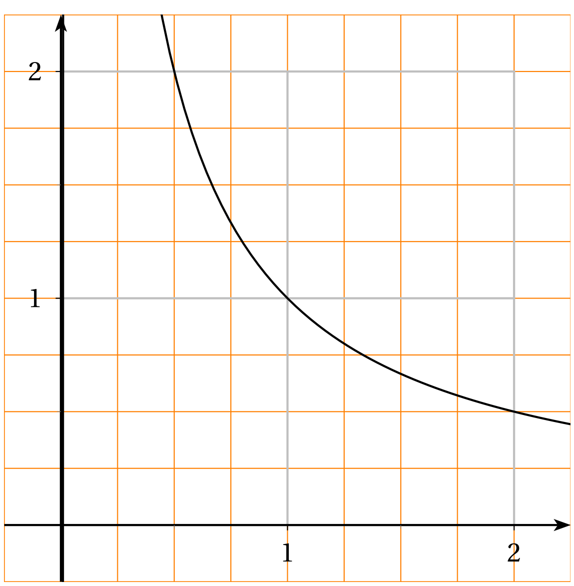
I) La notation $\int_a^b f(x)dx$

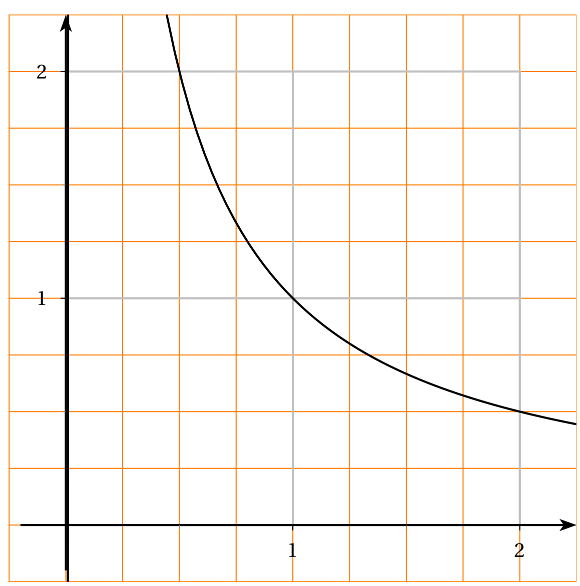
I.1. Problème : la quadrature de l'hyperbole

Travail de l'élève **1.** Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(t) = \dfrac{1}{x}$. On a dessiné ci-dessous sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$.

1. Comment encadrer l'aire $\mathscr{A}$ comprise entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$?





2. On a finalement découpé l'intervalle $[1;2]$ en quatre sous-intervalles de même amplitude $\dfrac{1}{4}$.

a. Justifier que :

$$\frac{f\left(1+\frac{1}{4}\right)+f\left(1+\frac{2}{4}\right)+f\left(1+\frac{3}{4}\right)+f\left(1+\frac{4}{4}\right)}{4} \leq \mathscr{A} \leq \frac{f(1)+f\left(1+\frac{1}{4}\right)+f\left(1+\frac{2}{4}\right)+f\left(1+\frac{3}{4}\right)}{4}$$

b. On a effectué les calculs ci-contre à l'aide du logiciel Xcas.
En déduire un encadrement de $\mathscr{A}$ entre deux décimaux avec deux chiffres après la virgule.

```
1  f(x):=1/x
                                   x -> 1/x
2  approx(somme(f(1+k/4),k,0,3))
                               3.0380952381
3  approx(somme(f(1+k/4),k,1,4))
                               2.5380952381
4  approx(somme(f(1+k/1000),k,0,999))
                               693.39724306
5  approx(somme(f(1+k/1000),k,1,1000))
                               692.89724306
```

3. Soit $n \geq 1$. On découpe l'intervalle $[1;2]$ en n sous-intervalles de même amplitude.

a. Généraliser la méthode précédente pour obtenir un encadrement de $\mathscr{A}$ dans ce cas, en fonction de n.

b. Déduire des autres résultats du logiciel Xcas un encadrement plus précis de $\mathscr{A}$, en précisant en le nombre n utilisé.

4. On propose l'algorithme ci-contre.

a. Qu'affiche l'algorithme quand on rentre la valeur $n = 4$?

b. Que fait-il ?

c. Pour $n = 10$, il renvoit la valeur 0.05, pour $n = 20$, la valeur 0.025, pour $n = 50$, la valeur 0.01.
Justifier que l'amplitude de l'encadrement de $\mathscr{A}$ lorsque l'on découpe l'intervalle $[1;2]$ en n sous-intervalles de même amplitude est $\dfrac{1}{2n}$.

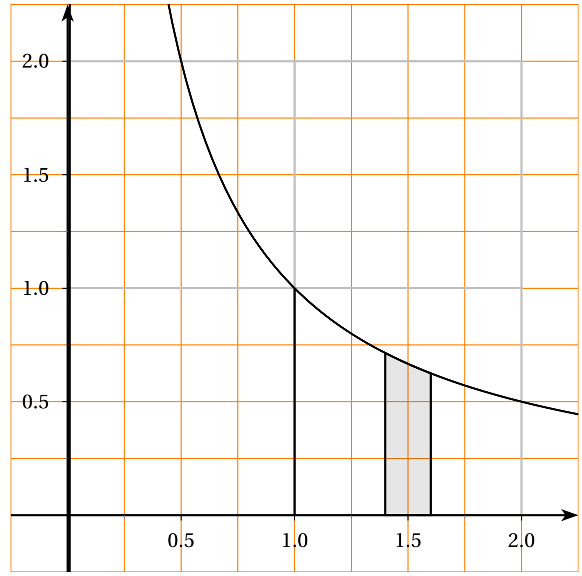
d. Quelle était la meilleure amplitude obtenue jusqu'à présent ?

e. Pour quelles valeurs de n obtient-on un encadrement de $\mathscr{A}$ à 0.0001 près ?

f. Modifier l'algorithme pour qu'il vous en procure un.

```
VARIABLES
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  k EST_DU_TYPE NOMBRE
  U EST_DU_TYPE NOMBRE
  V EST_DU_TYPE NOMBRE
  E EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE n
  U PREND_LA_VALEUR 0
  V PREND_LA_VALEUR 1/n
  POUR k ALLANT_DE 1 A n-1
    DEBUT_POUR
    U PREND_LA_VALEUR U+1/(n+k)
    V PREND_LA_VALEUR V+1/(n+k)
    FIN_POUR
  U PREND_LA_VALEUR U+1/(2*n)
  E PREND_LA_VALEUR V-U
  AFFICHER E
FIN_ALGORITHME
```

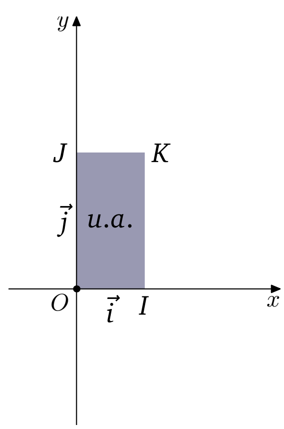
5. Pour tout $t > 1$, on note $\mathrm{S}(t)$ l'aire de la portion de plan délimitée par l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = 1$ et $x = t$ et la courbe $\mathscr{C}_f$.
Soient a et h deux réels tels que $a \geq 1$ et $h > 0$.
   a. En utilisant deux rectangles bien choisis, montrer que
$$\frac{1}{a+h} \leq \frac{\mathrm{S}(a+h)-\mathrm{S}(a)}{h} \leq \frac{1}{a}$$
   b. Proposer une conclusion.
   c. En déduire une valeur exacte possible pour $\mathscr{A}$ et contrôler sa cohérence avec l'encadrement trouvé précédemment.
   d. Proposer une valeur exacte pour l'aire du dommaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 3$ et $x = 5$.



I.2. Unité d'aire

Définition 1.

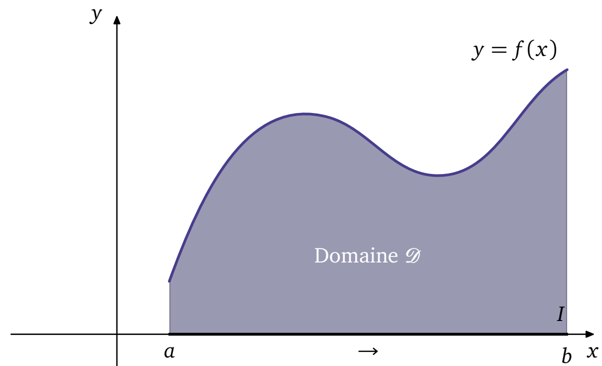
Dans le plan muni d'un repère orthogonal $(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j})$, on considère les points I, J et K définis par :
$$\overrightarrow{\mathrm{OI}} = \vec{i} \qquad \overrightarrow{\mathrm{OJ}} = \vec{j} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{\mathrm{OK}} = \vec{i} + \vec{j}$$
L'aire du rectangle OIKJ représente une unité d'aire, on note :
$$\mathscr{A}(\mathrm{OIKJ}) = 1 \text{ u.a}$$



Remarques :

- ⇝ Lorsque le repère est orthonormal le rectangle OIKJ est un carré.
- ⇝ Si par exemple $\|\vec{i}\| = 2$ cm et $\|\vec{j}\| = 3$ cm alors une unité d'aire correspond à 6 cm^2 i.e
$$1 \text{ u.a} = 6 \text{ cm}^2$$
- ⇝ Dans l'activité précédente, l'unité de chaque axe était de 2 cm, donc l'unité d'aire valait 4 cm^2. On pouvait encore dire qu'elle valait 16 petits carreaux.
- ⇝ Cependant, ces conversions ne nous intéressent pas, ne présentant aucune difficulté et nous exprimerons tous les résultats en unité d'aire.

I.3. Somme de Riemann et notation

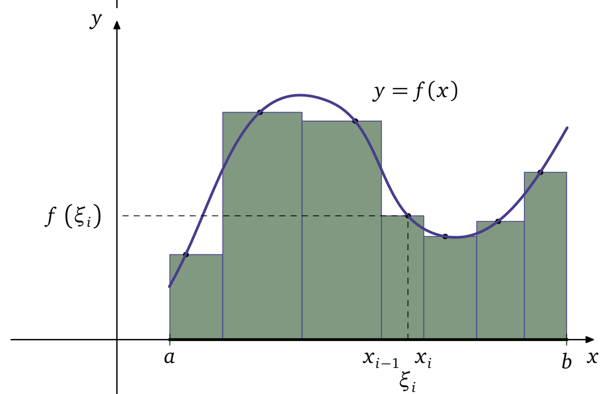


But : Calculer l'aire du domaine $\mathscr{D}$

L'objectif du chapitre est donc de déterminer l'aire (en u.a) d'un domaine $\mathscr{D}$ définit par :

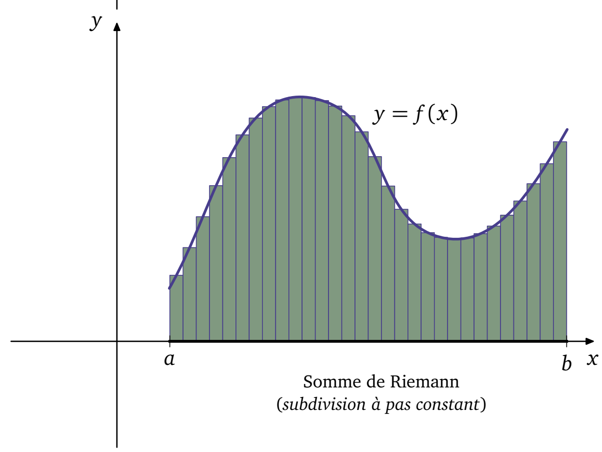
$$\mathscr{D} = \{\mathrm{M}(x; y) \in \mathscr{P} \text{ tel que } a \leq x \leq b \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\}$$

où f est une fonction continue sur l'intervalle $[a; b]$.



Somme de Riemann

On doit à Riemann l'idée d'approcher l'aire de $\mathscr{D}$ par celles de rectangles sommées.



Somme de Riemann
(*subdivision à pas constant*)

$n = 30$

Il s'aperçoit que si l'on divise l'intervalle $[a; b]$ en n sous-intervalles, avec n très grand, alors on obtient une valeur approchée de l'aire de $\mathscr{D}$.
Il choisit des intervalles de même amplitude et il affirme :

$$\mathscr{A}(\mathscr{D}) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} \times f(\zeta_i)$$

En effet, la largeur de chacun des rectangles est $\dfrac{b-a}{n}$, et leur longueur est donnée par l'image du réel $f(\zeta_i)$.

On peut maintenant comprendre la notation choisie par les mathématiciens :

- ⇝ Lorsque n tend vers $+\infty$ chaque subdivision sur l'axe des abscisses est infiniment petite est vaut $\dfrac{b-a}{n}$.
  Pour le symboliser on note dx.
- ⇝ Lorsque n tend vers $+\infty$ on considère donc une somme infinie, que l'on note avec un S déformé : $\displaystyle\int_a^b$
- ⇝ Comme chaque subdivision est infiniment petite, on considère $f(\zeta_i)$ où ζ_i prend toutes les valeurs de $[a; b]$.

Ainsi on écrit logiquement :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} \times f(\zeta_i) = \int_a^b f(x)\,dx$$

II) Intégrale d'une fonction continue positive sur un intervalle $[a;b]$

II.1. Définition

Définition 2.

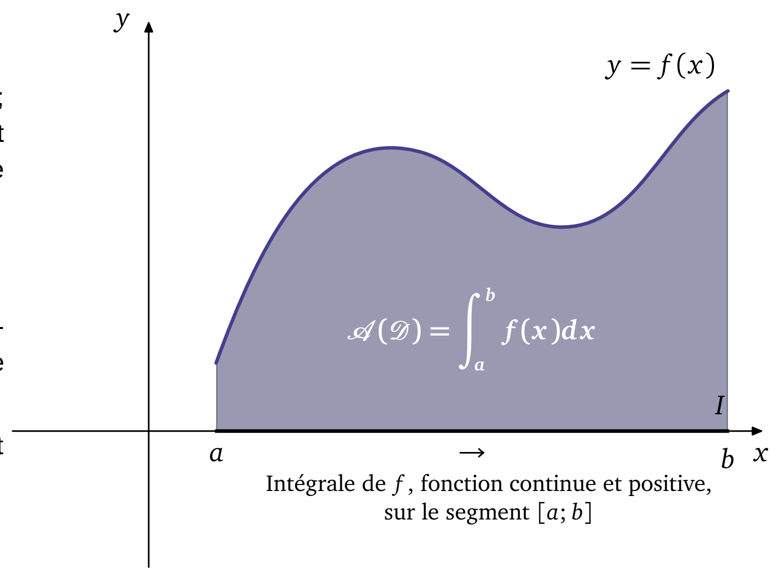
On considère une fonction f **continue et positive** sur un intervalle fermé borné $[a;b]$.
On appelle **intégrale de** f **de** a **à** b, notée $\int_a^b f(x)dx$, l'aire, exprimée en u.a, du domaine $\mathscr{D}$ délimité par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les deux droites verticales d'équations $x=a$ et $x=b$. On parle aussi d'**aire sous la courbe** entre a et b.
Les réels a et b s'appellent les **bornes** de l'intégrale.

Remarques :

- ⇝ La variable x figurant dans l'intégrale est « muette » ; elle n'intervient pas dans le résultat. On aurait pu tout aussi bien la noter par n'importe quelle autre lettre i.e

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt \int_a^b f(u)du \ldots$$

- ⇝ L'aire de $\mathscr{D}$ est de mesure finie. En effet, f est continue sur le segment $[a;b]$ donc majorée. Il existe donc un rectangle contenant $\mathscr{D}$
- ⇝ $\int_a^a f(x)dx = 0$ car alors le domaine correspondant est réduit à un segment.



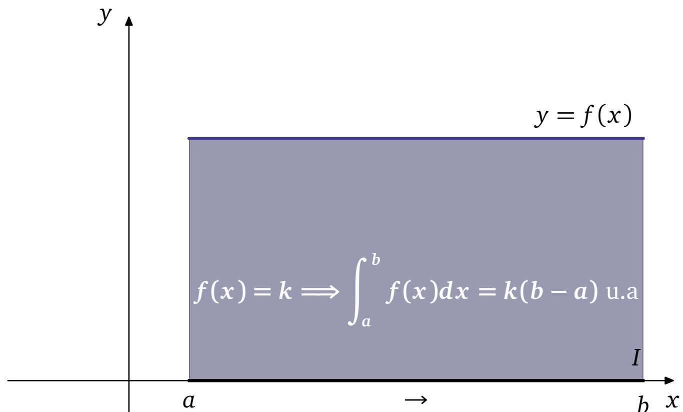
Intégrale de f, fonction continue et positive, sur le segment $[a;b]$

Exemples :

1. On considère une fonction f constante égale à $k \geq 0$.
   a. Proposer une valeur pour $\int_a^b f(x)dx$ dans le cas particulier où $k=0$, puis pour $k=1$.
   b. Même question dans le cas général.
2. On considère une fonction affine f positive sur le segment $[a;b]$ et définie par $f(x) = mx+p$
   a. Représenter graphiquement la fonction f définie sur $[1;8]$ par $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.
   Déterminer alors $\int_1^8 \left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\right)dx$
   b. Proposer une valeur pour $\int_a^b f(x)dx$ dans le cas général.
3. Soit f la fonction définie sur $[-1;1]$ par $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.
   a. Vérifier que la courbe $\mathscr{C}_f$ représentant f est le demi-cercle de centre O et de rayon 1 qui est situé dans le demi-plan des ordonnées positives.
   b. En déduire que

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{4}$$

Solution :



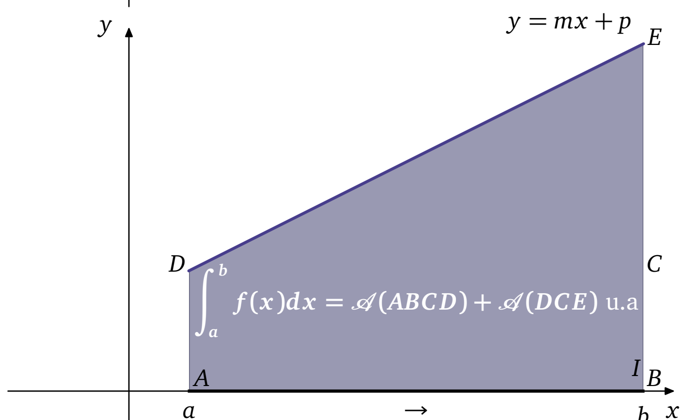
Intégrale de f, constante et positive, sur le segment $[a;b]$

On a simplement appliqué la formule donnant l'aire d'un rectangle : $\ell \times \mathrm{L}$.
Si $k = 0$, on a :

$$\int_a^b f(x)dx = 0 \text{ u.a}$$

Si $k = 1$, on a :

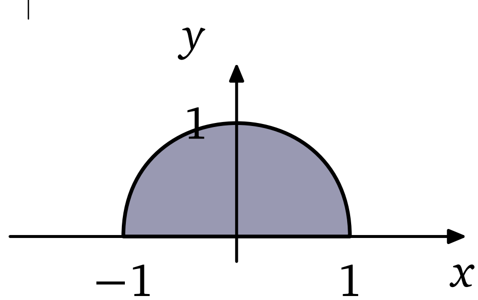
$$\int_a^b f(x)dx = b - a = \text{ longueur du segment } [a;b]$$



Intégrale de f, affine et positive, sur le segment $[a;b]$

On décompose l'aire du trapèze ABED comme la somme des aires du rectangle ABCD et CDE, on a alors :

$$\int_a^b f(x)dx = \mathscr{A}(\mathrm{ABCD}) + \mathscr{A}(\mathrm{CDE}) = f(a) \times (b-a) + \frac{f(a)+f}{2}$$



L'aire d'un cercle de rayon 1 valant π, celle du quart de cercle vaut elle $\frac{\pi}{4}$ d'où

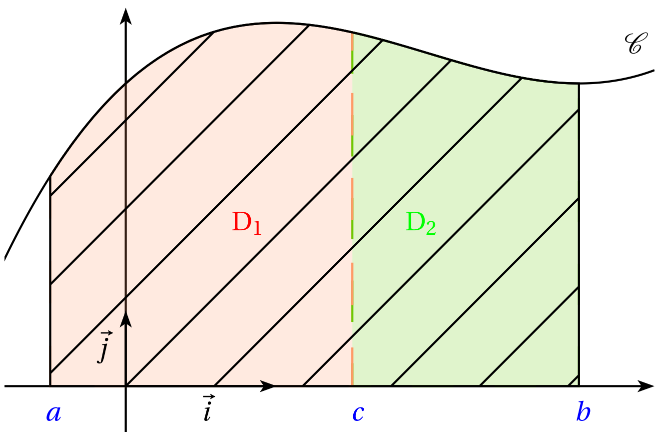
$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}$$

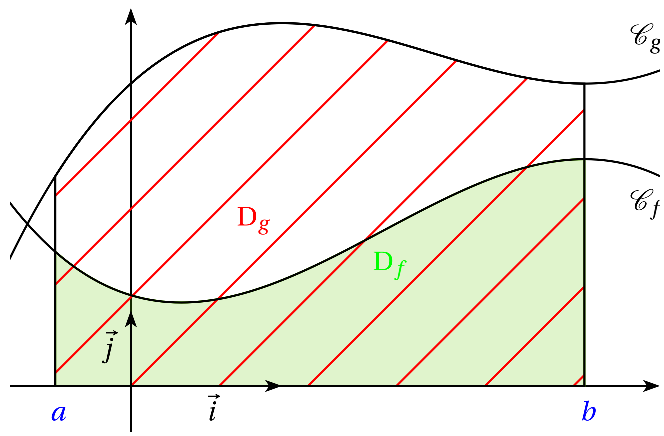
II.2. Conséquences immédiates

Propriété 1.

Soient f et g deux fonctions continues et positives sur un intervalle $[a;b]$. Alors :

- Pour tout $c \in [a;b]$, on a $\displaystyle\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$ (Relation de Chasles)
- $\displaystyle\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^+$, on a $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$
- Si de plus, pour tout $x \in [a;b]$, on a $f(x) \leq g(x)$ alors : $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.





Exercice 1 :

1. Prouvez que, pour tout $t \in [0,1]$, $\dfrac{t^2}{2} \leq \dfrac{t^2}{1+t} \leq t^2$.
2. Déduisez-en un encadrement de $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{1+t}\,dt$.

Exercice 2 : Soit f une fonction continue et positive sur $[0;1]$ telle que, pour tout $x \in [0;1]$, il existe deux réels m et M tels que :

$$m \leq f(x) \leq \mathrm{M}$$

Déterminer la limite de la suite de terme général :

$$u_n = \int_0^{\frac{1}{n}} f(x)dx$$

Exercice 3 : Etudier la limite de la suite de terme général

$$u_n = \int_n^{n+1} e^{-x}dx$$

Vous pourrez commencer par encadrer e^{-x} sur $[n;n+1]$ en fonction de n.

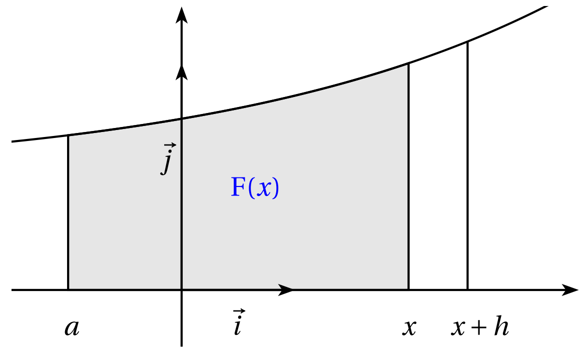
Exercice 4 : On pose $\quad \mathrm{I}_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 (1-x)^n e^{-x}dx \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

1. Prouver que $\quad 0 \leq \mathrm{I}_n \leq \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 e^{-x}dx$

2. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n$

II.3. De l'aire sur une courbe à la recherche de primitive

<u>Travail de l'élève</u> **2.**



On considère une fonction f continue, positive et croissante sur l'intervalle $[a;b]$. Soit F la fonction suivante :

$$\begin{array}{rcccl} \mathrm{F} & : & [a;b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt \end{array}$$

1. Soit h un réel strictement positif.

a. En utilisant la relation de Chasles, montrer que $\mathrm{F}(x+h) - \mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_x^{x+h} f(x)dx$.
Hachurer l'aire correspondante sur le graphique.

b. En utilisant deux rectangles bien choisis, montrer que

$$f(x) \leq \frac{\mathrm{F}(x+h) - \mathrm{F}(x)}{h} \leq f(x+h)$$

2. Répondre aux mêmes question pour $h < 0$.

3. Quelle hypothèse sur f nous permet d'affirmer que $\displaystyle\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$?

4. Que pouvez-vous en déduire sur la fonction F ?

5. Que vaut F(a) ?

6. Conclure.

7. **Application** : proposer une valeur possible pour $\displaystyle\int_2^4 t^2 dt$.
Est-on sûr qu'il s'agisse de la bonne ?

<u>Solution</u> **:**

On note $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_2^x t^2 dt$. On recherche une fonction qui vérifie $\mathrm{F}'(x) = x^2$ et $\mathrm{F}(2) = 0$.

On obtient $\mathrm{F}(x) = \dfrac{x^3}{3} + k$ avec $\mathrm{F}(2) = 0 \Longleftrightarrow k = -\dfrac{2^3}{3} = -\dfrac{8}{3}$.
Par conséquent :

$$\mathrm{F}(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{8}{3}$$

Ainsi on pourrait avoir $\displaystyle\int_2^4 t^2 dt = \frac{4^3}{3} - \frac{8}{3} = \frac{64-8}{3} = \frac{56}{8}$

Théorème 1. (Fondamental)

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$.
Alors la fonction F définie sur $[a;b]$ par :

$$\mathrm{F}(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

est dérivable sur $[a;b]$ et pour tout réel $x \in [a;b]$ on a $\mathrm{F}'(x) = f(x)$.
On dit F est **une primitive** de f sur $[a;b]$.
Plus précisément, F est **la primitive** de f sur $[a;b]$ qui s'annule en a.

Preuve

L'activité démontre ce théorème dans le cas où f est croissante.
On peut faire de même dans le cas où f est décroissante.
Pour le cas où f n'est pas monotone, il suffit de considérer les sous-intervalles de $[a;b]$ sur lesquels f est monotone et de les sommer. Comme $(u+v)' = u' + v'$, on retrouve bien le résultat cherché.
Par contre, on n'a pas démontré l'unicité de la primitive de f s'annulant en a.
Pour cela, intéressons-nous de plus près aux primitives d'une fonction.

Remarque : Par conséquent, les fonctions continues et positives sur un intervalle $[a;b]$ admettent des primitives sur $[a;b]$.

III) Primitive d'une fonction et théorème fondamental

III.1. Notion de primitive

Définition 3.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On appelle **primitive** de f sur I toute fonction F dérivable sur I telle que pour tout $x \in \mathrm{I}$ on a $\mathrm{F}'(x) = f(x)$.

Exemples :

$x \longmapsto x^2$ et $x \longmapsto x^2 - 5$ sont des primitives de $x \longmapsto 2x$ sur $\mathbb{R}$.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x + \cos x$
Déterminons (mentalement) une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.
La fonction F définie par $\mathrm{F}(x) = \dfrac{x^3}{3} - x^2 + \sin x$ convient.
En effet pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction F est dérivable (comme somme de fonctions qui le sont) et

$$\mathrm{F}'(x) = \frac{3x^2}{3} - 2x + \cos x = f(x)$$

Remarquons que la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{G}(x) = \dfrac{x^3}{3} - x^2 + \sin x + 12$ convient aussi puisque la dérivée d'une constante est nulle.

Remarque : Si f admet une primitive sur I, alors elle en admet une infinité.

III.2. Ensemble des primitives d'une fonction

Théorème 2.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I admettant une primitive F. Alors les primitives de f sur I sont les fonctions du type $x \longmapsto F(x)+c$ où $c \in \mathbb{R}$.

Preuve

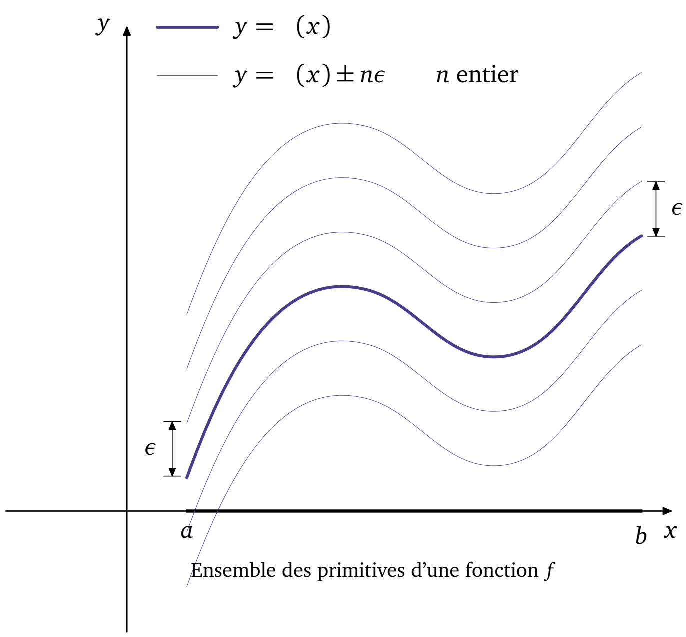
Remarquons déjà que pour tout $x \in I$, on a $(F(x)+c)' = F'(x)+c' = f$.
Donc les fonctions données sont bien des primitives de f sur I.
Montrons maintenant que ce sont les seules.
Soit G une primitive de f sur I, différente de F.
Alors $F' = G' = f$ sur I.
Par conséquent

$$G' - F' = 0 \text{ sur I} \Longleftrightarrow (G-F)' = 0 \text{ sur I}$$

Or, les seules fonctions qui ont une dérivée nulle sont les fonctions constantes, donc pour tout $x \in I$, on a :

$$G(x) - F(x) = c \text{ où } k \text{ est une constante}$$

D'où $G(x) = F(x) + c$, pour tout $x \in I$.



Ensemble des primitives d'une fonction f

Corollaire 1.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I admettant des primitives sur I. et x_0 , y_0 deux réels.
Il existe une unique primitive F de f sur I satisfaisant la condition initiale $F(x_0) = y_0$

Preuve

On cherche à montrer l'existence et l'unicité d'une primitive F de f sur I telle que $\mathrm{F}(x_0) = y_0$.
Soit G une primitive de f sur I. Alors toutes les primitives de la fonction f sont de la forme $x \longmapsto \mathrm{G}(x)+k$ où $c \in \mathbb{R}$.
Donc on cherche F telle que $\mathrm{F} = \mathrm{G} + k$.
On veut de plus $\mathrm{F}(x_0) = y_0 \iff \mathrm{G}(x_0) + k = y_0$.
En choisissant pour $k = y_0 - \mathrm{G}(x_0)$ on obtient l'existence d'une primitive F telle que $\mathrm{F}(x_0) = y_0$, ainsi que l'unicité d'une telle fonction.
Ainsi il existe une unique primitive satisfaisant la condition $\mathrm{F}(x_0) = y_0$.

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Trouvons l'unique primitive F de f sur $\mathbb{R}$ telle que $\mathrm{F}(0) = 2$.
Notons que $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$, autrement dit $\sqrt{u}$ est une primitive de $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.
Ici $u(x) = x^2 + 1$ et donc $u'(x) = 2x$, en réécrivant $f(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$, on trouve que G définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\mathrm{G}(x) = \sqrt{x^2+1}$$

est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
Par conséquent les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont de la forme

$$\mathrm{F}(x) = \sqrt{x^2+1} + c \qquad \text{où } c \text{ est une constante}$$

Comme $\mathrm{F}(0) = 2$ on a

$$\sqrt{0^2+1} + c = 2 \iff 1 + c = 2 \iff c = 1$$

Ainsi la primitive cherchée est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{F}(x) = \sqrt{x^2+1} + 1$

Remarques :

- ⇝ Nous venons donc de finir la démonstration du théorème fondamental, à savoir que la fonction F définie par $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ est l'unique primitive de f sur $[a;b]$ qui s'annule en a.
- ⇝ Trouver une primitive d'une fonction f se fait à l'aide des formules de la dérivée que l'on utilise « dans l'autre sens ». Le tableau suivant éclaircira ce point.
- ⇝ Une question naturelle se pose, une fonction admet-elle toujours des primitives ? La réponse est non en général. Par contre, nous avons déjà vu que les fonctions continues et positives en admettaient.
  Et si une fonction est simplement continue ? eh bien c'est l'objet de la suite du cours...

III.3. Corollaires du Théorème Fondamental

Corollaire 2. (Formule de Newton-Leibniz)

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ et F une primitive de f sur $[a;b]$. On a :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$$

Preuve

Soit G la primitive de f sur $[a;b]$ telle que $\mathrm{G}(x)=\int_a^x f(t)dt$.

Soit F une primitive de f sur $[a;b]$. On sait alors qu'il existe une constante $c\in\mathbb{R}$ telle que pour tout $x\in[a;b]$:

$$\mathrm{F}(x)=\mathrm{G}(x)+c$$

On a alors $\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)=\mathrm{G}(b)+c-(\mathrm{G}(a)+c)=\mathrm{G}(b)-\mathrm{G}(a)=\int_a^b f(t)dt-\int_a^a f(t)dt=\int_a^b f(t)dt$

Remarques :

- Ainsi $\int_a^b f(x)dx$ ne dépend pas de la primitive choisie.
- Lors des calculs, on note dans la pratique $[\mathrm{F}(t)]_a^b$

Exemples :

Le corollaire précédent est un résultat puissant qui nous permet de calculer les intégrales (et donc les aires) suivantes avec une grande aisance :

1. $\int_1^2 \frac{1}{x^2}dx=\left[-\frac{1}{x}\right]_1^2=-\frac{1}{2}+\frac{1}{1}=\frac{1}{2}$
2. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt=[\sin t]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=2$
3. $\int_0^1 e^t dt=[e^t]_0^1=e-1$
4. $\int_x^1 e^t dt=[e^t]_x^1=e-e^x$ pour tout $x\leq 1$
5. $\int_1^x \frac{1}{t}dt=[\ln t]_1^x=\ln x-\ln 1=\ln x$ pour tout $x\geq 1$
6. $\int_0^1 x^n dx=\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1=\frac{1}{n+1}$

Remarque : On vient de voir dans l'exemple précédent que $\int_1^x \frac{1}{t}dt=[\ln t]_1^x=\ln x=\ln x$.

On retrouve le résultat de la première activité sur la quadrature de l'hyperbole.

Histoiriquement, je vous rappelle que c'est comme cela qu'on a découvert le logarithme népérien.

Corollaire 3. (du théorème fondamental)

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

***Preuve* Type ROC**

Démontrons le cas où $\mathrm{I}=[a;b]$.

Prérequis :

- le théorème fondamental pour les fonctions continues et positives sur $[a;b]$
- On admet que dans ce cas, f admet un minimum m sur $[a;b]$.

Soit g la fonction définie sur I par $g(x)=f(x)-m$.

1. Justifier que g est continue et positive sur I.
2. En déduire qu'elle admet une primitive G sur $[a;b]$ en en proposant une.
3. Montrer que $f(x)=\mathrm{G}'(x)+m$, pour tout $x\in\mathrm{I}$.
4. En déduire une primitive F de f sur $[a;b]$.
5. Conclure.

III.4. Tableaux de primitives

Les résultats de ces tableaux s'établissent en vérifiant simplement que l'on a bien $F'(x) = f(x)$ sur l'intervalle considéré.

Primitives des fonctions de référence		
Fonction f	**Primitive** F, $c \in \mathbb{R}$	**Intervalle** I
$f(x) = k$ (constante)	$F(x) = kx + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax + b$ (a et b réel)	$F(x) = \frac{1}{2}ax^2 + bx + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x} + c$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{Z}$ et $n \neq -1$)	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$	Si $n \geq 0$: $\mathbb{R}$ Si $n \leq -2$: $\mathbb{R}^*$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x + c$	$]0;+\infty[$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + c$	$]0;+\infty[$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + c$	$\mathbb{R}$

Opération sur les primitives u et v sont des fonctions dérivables sur un intervalle I		
Fonction	**Une Primitive**	**Conditions**
$u'+v'$	$u+v$	
ku' (k constante)	ku	
$u'u^n \quad (n \in \mathbb{Z}$ et $n \neq -1$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	Si $n \geq 0$: $u(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathrm{I}$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u(x) > 0$ pour tout $x \in \mathrm{I}$
$\dfrac{v'}{v^2}$	$-\dfrac{1}{v}$	$v(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathrm{I}$
$u'e^u$	e^u	
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln(\mid u \mid)$	$u(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathrm{I}$

Exemples :

Déterminer pour chacune des fonctions suivantes une primitive :

1. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{6x^2-5x+3}{7}$.
2. g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 7x(3x^2+5)^4$.
3. h définie sur $]2;+\infty[$ par $h(x) = \dfrac{4x^3+2}{\sqrt{x^4+2x-3}}$.
4. f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

Exercice 5 : Soit F la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $\mathrm{F}(x) = \dfrac{2}{3}x\sqrt{x}$.
Calculer $\mathrm{F}'(x)$. Qu'a-t-on démontré ?

Exercice 6 : Calculer une primitive de f_i sur $]0;1[$ dans les cas suivants :

$$f_1(x) = \frac{x+1}{(x^2+2x+2)^2} \qquad f_2(x) = \tan x \qquad f_3(x) = \frac{1}{x\ln x}$$

Exercice 7 : Etudier si F est une primitive de f sur I :

1. $f(x) = \dfrac{2x^2+8x-5}{(x^2+x+3)^2}$ et $\mathrm{F}(x) = \dfrac{x^2-x+2}{x^2+x+3}$ avec $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.

2. $f(x)=\dfrac{2x-3}{2x\sqrt{x}}$ et $F(x)=\dfrac{2x+3}{\sqrt{x}}$ avec $I=]0;+\infty[$.

3. $f(q)=\dfrac{3q-4}{\sqrt{2q-4}}$ et $F(q)=q\sqrt{2q-4}$ avec $I=]2;+\infty[$.

Exercice 8 : Si vous reconnaissez une forme du style $u'u^n$, alors une primitive sera $\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$
En déduire une primitive de f avec $f(x)=\dfrac{3}{(x-1)^2}$ sur $]1;+\infty[$.

Exercice 9 : f est la fonction définie sur $I[-1;8]$ par $f(x)=\dfrac{2x^3+8x^2+8x-3}{x^2+4x+4}$

1. Démontrer que pour tout $x\in I$ on a $f(x)=2x-\dfrac{3}{(x+2)^2}$

2. **a.** En déduire une primitive G de f sur I.

b. Calculer la primitive F de f telle que $F(0)=2$.

Exercice 10 :

1. f est la fonction définie sur $]2;+\infty[$ par $f(x)=-\dfrac{2}{(x-2)^2}$.
Déterminer une primitive F de f sur $]2;+\infty[$.

2. G est la fonction définie sur $]2;+\infty[$ par $G(x)=\dfrac{3x-4}{x-2}$.
Calculer la fonction dérivée de G.

3. Que peut-on en déduire pour les fonctions F et G ? Vérifier ce résultat en calculant $F(x)-G(x)$.

Exercice 11 : Déterminer une primitive sur les intervalles I considérés de :

1. $g:x\longmapsto\dfrac{3x}{\sqrt{x^2-1}}$ avec $I=]-1;1[$

2. $h:x\longmapsto\dfrac{e^x+3}{(e^x+3x)^3}$ avec $I=]-\infty;0]$

3. $k:x\longmapsto\dfrac{1}{(ax+b)^2}$ avec $I=\left]-\dfrac{b}{a};+\infty\right[$

4. $f:x\longmapsto\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$ avec $I=\mathbb{R}^{+*}$

5. $j:x\longmapsto e^{3x+2}$ avec $I=\mathbb{R}$

6. $l:x\longmapsto(2x+1)e^{x^2+x+7}$ avec $I=\mathbb{R}$

7. $m:x\longmapsto\sin(3x)+3\cos(2x)$ avec $I=\mathbb{R}$

Exercice 12 : On rappelle que $\cos^2 t=\dfrac{1+\cos 2t}{2}$ Démontrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=\frac{\pi}{4}$

Exercice 13 : Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x^2}dx$ **2.** $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{\ln t}{t}dt$ **3.** $\displaystyle\int_2^4\frac{e^t}{e^t+1}dt$ **4.** $\displaystyle\int_0^2\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$

IV) Extension aux fonctions de signe quelconque

IV.1. Définition

Théorème 3. (Définition)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I.
Alors pour tous a, b de I, la différence $F(b)-F(a)$ ne dépend pas du choix de la primitive F.
On décide alors, en étendant la formule de Newton-Leibniz aux fonctions continues de signe quelconque, de définir l'intégrale de a à b de f par :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$$

Preuve

On sait déjà que si f est continue sur I, alors elle admet des primitives sur I.
Soit F et G deux d'entre elles.
On sait alors que sur I on a $G = F + c$ avec $c \in \mathbb{R}$.
Ainsi $G(b)-G(a) = F(b)-c-(F(a)-c) = F(b)-F(a)$.

Remarque : Il est clair que, pour tout $a \in I$, on a toujours $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

IV.2. Propriétés généralisées

Dans toute cette partie, f désigne une fonction continue sur un intervalle I, F une primitive de f sur I, et a et b sont deux réels de I (rangés dans un ordre quelconque).

Propriété 2.

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

Preuve

Avec la définition généralisée, on a $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a) = -(F(a)-F(b)) = -\int_b^a f(x)\,dx$.

Remarque : Ainsi, une intégrale n'est plus forcément positive. On continuera à l'interpréter en terme d'aire sous la courbe mais on parlera d'aire algébrique (et non géométrique).
Nous verrons plus loin cette interprétation en détails.

Propriété 3. (Chasles)

Pour tout $c \in I$. Alors :

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

Preuve

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \mathrm{F}(c) - \mathrm{F}(a) + \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(c) = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a) = \int_a^b f(x)fx.$$

Remarque : L'ordre de a, b et c n'a aucune importance. Ainsi $\int_2^3 f(x)dx + \int_3^1 f(x)dx = \int_2^1 f(x)dx = -\int_1^2 f(x)dx$.

Propriété 4. (Linéarité)

Soit g une fonction continue sur I. Alors pour tous réels α et β on a :

$$\int_a^b \left(\alpha f(x) + \beta g(x)\right) dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

Preuve

Soit G une primitive de g sur I. Alors une primitive sir I de $\left(\alpha f + \beta g\right)$ est $\alpha\mathrm{F} + \beta\mathrm{G}$.
Ensuite, il suffit de calculer et comparer.

Exemple :

Déterminons :

$$\int_0^1 5x^2 + 3xdx$$

D'après la propriété précédente on a :

$$\int_0^1 5x^2 + 3xdx = 5\int_0^1 x^2dx + 3\int_0^1 xdx = 5\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + 3\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{5}{3} + \frac{3}{2} = \frac{19}{6} \text{ u.a}$$

Propriété 5. (Ordre)

Soient a et b tels que $a \leq b$.

- ⇝ Si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathrm{I}$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
- ⇝ Soit g une fonction continue sur I telle que $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in \mathrm{I}$. Alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

  Inégalité triangulaire :

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$

Preuve

1. Comme f est positive sur le segment $[a;b]$, l'intégrale de f entre a et b représente une aire et est donc positive ou nulle.
2. On a $f \leq g \Longleftrightarrow g - f \geq 0$ et grâce à la propriété précédente on a donc :

$$\int_a^b g(x) - f(x)dx \geq 0$$

Comme l'intégrale est linéaire on a :

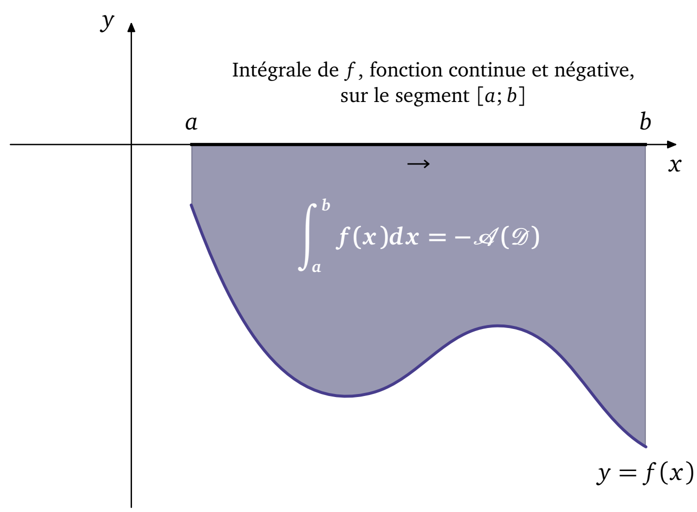
$$\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx \geq 0 \Longleftrightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

3. Rappel : $-\mathrm{M} \leq f(x) \leq \mathrm{M} \Longleftrightarrow | f(x) | \leq \mathrm{M}$
On a pour tout $x \in [a;b]$: $-| f(x) | \leq f(x) \leq | f(x) |$ et donc :

$$-\int_a^b | f(x) | dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b | f(x) | dx \Longleftrightarrow \left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b | f(x) | dx$$

IV.3. Interprétation graphique

On considère une fonction f continue sur un intervalle $[a;b]$, et F une primitive de f sur $[a;b]$.



⇝ Si f est négative sur $[a;b]$, alors $f = -|f|$ et donc

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b -| f(x) | dx = -\int_a^b |f(x)|dx$$

Ainsi, $\int_a^b f(x)dx$ est l'aire du domaine habituel, mais comptée négativement.

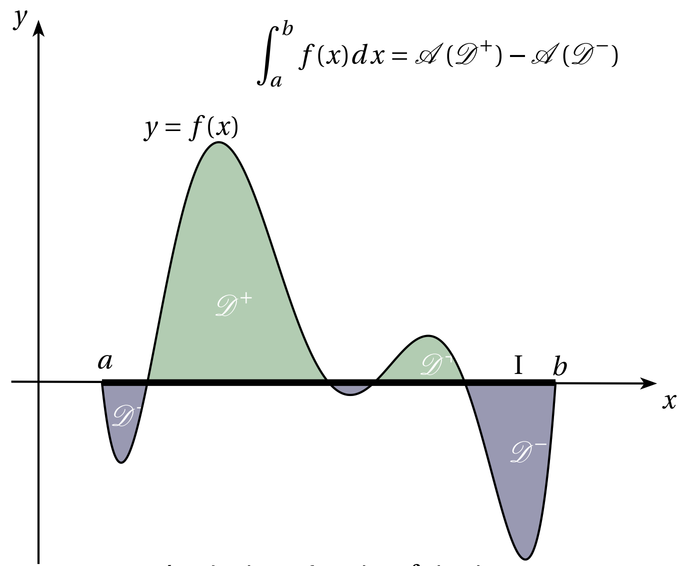
⇝ Si f est de signe quelconque sur $[a;b]$, on définit f comme somme de deux nouvelles fonctions :

$$f^{+}(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \geq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad f^{-}(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \geq 0 \\ f(x) \text{ sinon} \end{cases}$$

Ainsi $f(x) = f^{+}(x) + f^{-}(x)$ pour tout $x \in \mathrm{I}$, avec f^{+} positive et f^{-} négative sur I. D'où

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \int_a^b \left(f^{+}(x) + f^{-}(x)\right)dx \\ &= \int_a^b f^{+}(x)dx + \int_a^b f^{-}(x)dx \end{aligned}$$

En d'autres termes $\int_a^b f(x)dx$ se calcule en comptant positivement l'aire des domaines où f est positive et négativement l'aire des domaines où f est négative.



Intégrale d'une fonction f de signe quelconque sur $[a;b]$

Exemple :

Calculons :

$$\int_0^4 3 - x dx$$

$3 - x \geq 0 \Longleftrightarrow x \leq 3$, par conséquent :

$$\int_0^4 3 - x dx = \int_0^3 3 - x dx + \int_3^4 3 - x dx = \frac{3 \times 3}{2} - \frac{1 \times 1}{2} = 4$$

Remarques :

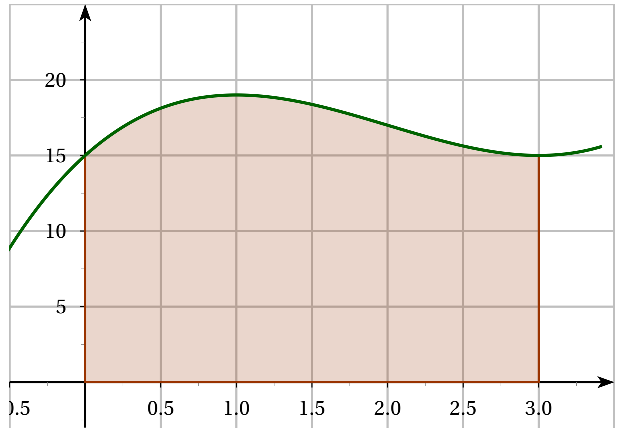
⇝ La définition de la valeur moyenne reste inchangée.

⇝ L'intégrale d'une fonction continue est donc l'aire algébrique.

⇝ L'objectif de la suite de la leçon est d'établir un moyen simple de calculer cette intégrale, on verra que l'on peut effectuer ce calcul à l'aide des primitives.

IV.4. Valeur Moyenne

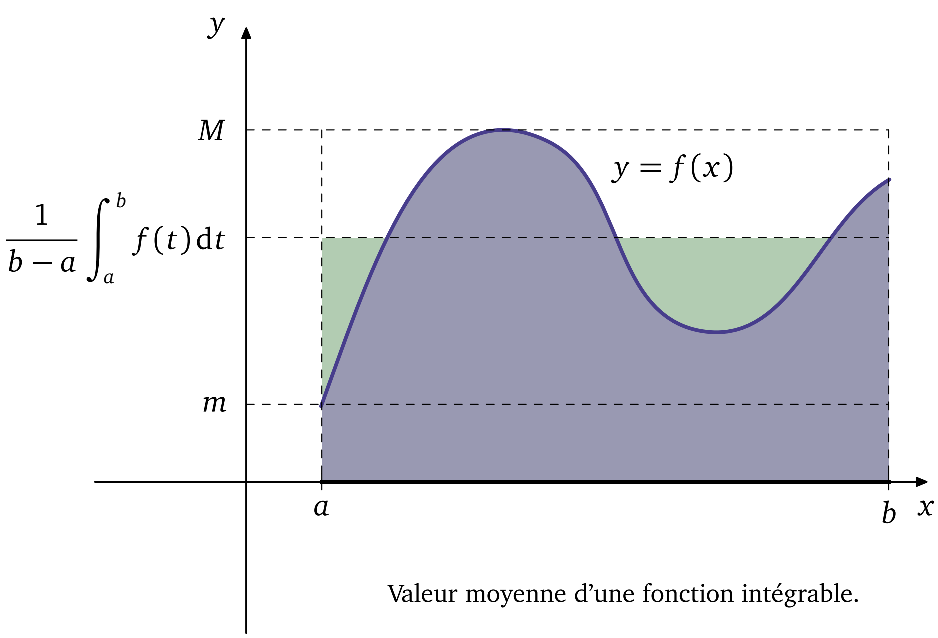
***Travail de l'élève* 3.** Un problème d'aplanissement.
Loic possède un terrain qu'il souhaite aplanir en rabotant les bosses et en comblant les creux.
Comme il est radin, il ne souhaite pas faire venir de la terre ou des pierres de l'extérieur, et ne veut pas non plus en évacuer hors de son terrain.
En coupe, le terrain ressemble à la figure ci-contre.
A quelle altitude va se trouver le terrain de Loïc ?



Définition 4.

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$.
La valeur moyenne de f sur $[a;b]$ est le réel μ :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$



Valeur moyenne d'une fonction intégrable.

La valeur moyenne μ correspond à la hauteur du rectangle de base $(b-a)$ dont l'aire algébrique est égale à l'aire sous la courbe sur $[a;b]$.
En effet, $\int_a^b \mu dx = \mu(b-a)$ est l'aire algébrique du rectangle de hauteur μ et de largeur $b-a$.
De plus, compte tenu de la définition de μ, on a alors :

$$\int_a^b \mu dx = \mu(b-a) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \times (b-a) = \int_a^b f(x)dx$$

Les aires sont donc bien égales.

V) Calcul d'aire entre deux courbes

Proposition 1.

Soient f et g deux fonctions continues sur un segment $[a;b]$.
On suppose que $g \leq f$ sur $[a;b]$, alors l'aire du domaine $\mathscr{D}$ défini par :

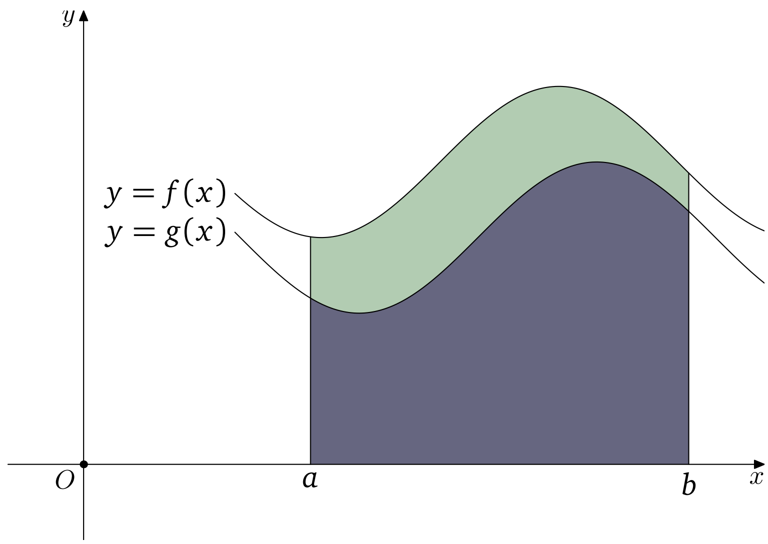
$$\mathscr{D} = \left\{ \mathrm{M}(x;y) \in \mathscr{P} \text{ tels que } a \leq x \leq b \text{ et } g(x) \leq y \leq f(x) \right\}$$

est donnée, en u.a, par :

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x) - g(x)dx$$

Preuve

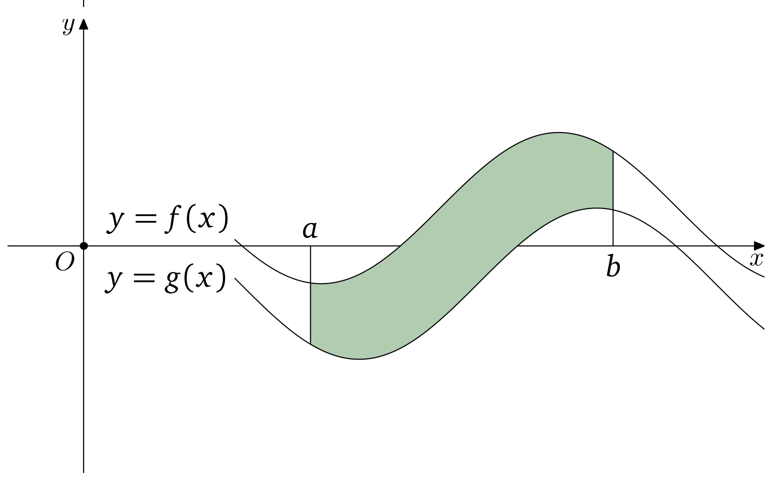
Cas où f et g sont positives :



Si les fonctions f et g sont positives le résultat est élémentaire, la différence des aires des domaines délimités par f et g donne bien l'aire entre les deux courbes et vaut :

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x) - g(x)dx$$

Cas où f et g sont de signes quelconques :
Par définition



$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f^+(x)dx + \int_a^b f^-(x)dx$$

Et de la même manière

$$\int_a^b g(x)dx = \int_a^b g^+(x)dx + \int_a^b g^-(x)dx$$

Preuve (Suite)

Notons $F_1 = -\int_a^b f^-(x)dx$ et $F_2 = \int_a^b f^+(x)dx$, dans ce cas F_1 représente l'aire entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_f$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ pour la partie de la courbe située sous l'axe des abscisses, inversement F_2 représente l'aire entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_f$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ pour la partie de la courbe située au dessus de l'axe des abscisses.
On définit de même $G_1 = -\int_a^b g^-(x)dx$ et $G_2 = \int_a^b g^+(x)dx$. Notons $\mathscr{A}$ l'aire située entre les deux courbes, on a alors :

$$\mathscr{A} = G_1 - F_1 + F_2 - G_2$$

De plus :

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b f^+(x)dx + \int_a^b f^-(x)dx - \int_a^b g^+(x)dx - \int_a^b g^-(x)dx = F_2 - F_1 - G_2 + G_1 = G_1 - F_1 + F_2 - G_2$$

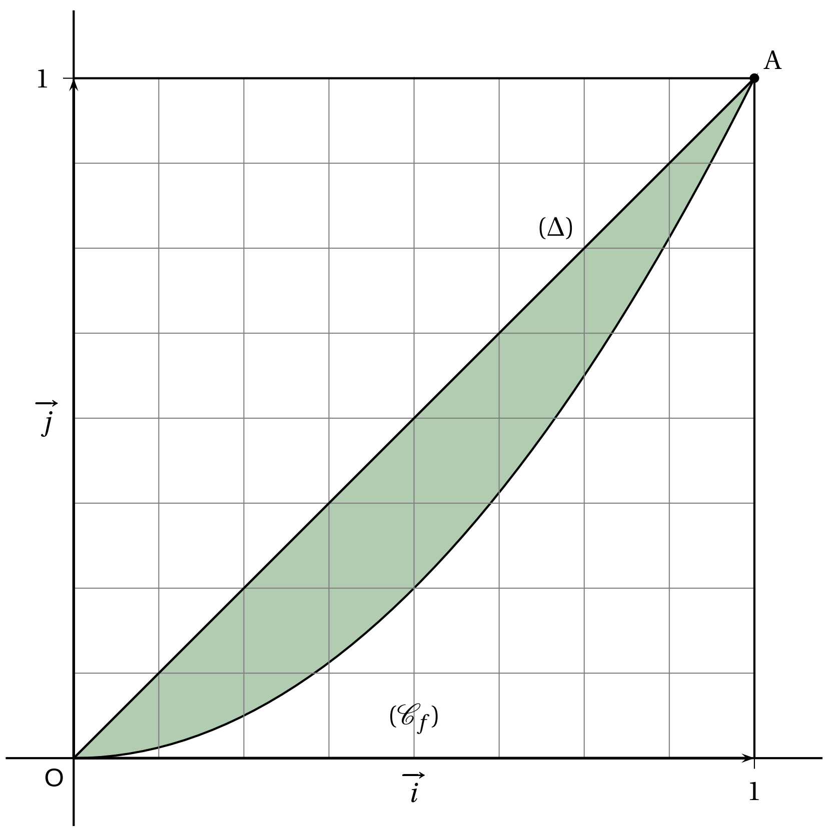
Par conséquent :

$$\int_a^b f(x) - g(x)dx = \mathscr{A}$$

Exemple :

Soit f et g définie sur $[0;1]$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = x$. Notons que sur $[0;1]$ on a $x \geq x^2$.
L'aire $\mathscr{A}$ entre $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_f$ sur le segment $[0;1]$ est :

$$\mathscr{A} = \int_0^1 g(x) - f(x)dx = \int_0^1 (x - x^2)dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \text{ u.a}$$



VI) Compléments

Intégrales de Wallis

Il s'agit, pour $n \in \mathbb{N}$ des intégrales suivantes :

$$\mathrm{I}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n dt \qquad \mathrm{J}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n dt \qquad \mathrm{K}_n = \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n dt \qquad \mathrm{L}_n = \int_{-1}^{1} (t^2-1)^n dt$$

Calcul de I_n par IPP

On a immédiatement : $\mathrm{I}_0 = \frac{\pi}{2}$ et $\mathrm{I}_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\, dt = 1$.
Pour tout $n \geq 0$, on a par IPP : $(u(t) = (\cos t)^{n+1}$ et $v'(t) = \cos t)$. :

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{n+1} \cos t\, dt = \quad \left[(\cos t)^{n+1} \sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n (\sin t)^2 dt \\ \mathrm{I}_{n+2} &= (n+1)(\mathrm{I}_n - \mathrm{I}_{n+2}) \\ \mathrm{I}_{n+2} &= \frac{n+1}{n+2} \mathrm{I}_n \end{aligned}$$

Il en résulte immédiatement : $\mathrm{I}_2 = \frac{1}{2}\mathrm{I}_0 = \frac{\pi}{4}$; $\mathrm{I}_3 = \frac{2}{3}\mathrm{I}_1 = \frac{2}{3}$; $\mathrm{I}_4 = \frac{3}{4}\mathrm{I}_2 = \frac{3\pi}{16}$.
D'où la formule générale :

Si n est pair $(n = 2p)$

$$\mathrm{I}_{2p} = \frac{2p-1}{2p} \times \frac{2p-3}{2p-2} \times \cdots \times \frac{1}{2}\mathrm{I}_0$$

$$\mathrm{I}_{2p} = \frac{(2p)!\pi}{2^{2p+1}(p!)^2}$$

.Si n est impair $(n = 2p+1)$

$$\mathrm{I}_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} \times \frac{2p-2}{2p-1} \times \cdots \times \frac{2}{3}\mathrm{I}_1$$

$$\mathrm{I}_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2\pi}{(2p+1)!}$$

Calcul de J_n en se ramenant à I_n

En posant $u = \frac{\pi}{2} - t$, on obtient :

$$\mathrm{J}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\right)^n (-du) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((\cos u)^n du = \mathrm{I}_n$$

Calcul de K_n en se ramenant à I_{2n+1}

En posant $u = \sin^{-1} t$ (fonction de $[-1;1]$ à valeurs dans $\left[\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$). On a donc $t = \sin u$.

$$\mathrm{K}_n = int_{-1}^{1}(t^2-1)^n dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos u)^{2n} \cos u\, du = 2\mathrm{I}_{2n+1} = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

Calcul de L_n en se ramenant à K_n

$$\mathrm{L}_n = \int_{-1}^{1} (t^2-1)^n dt = (-1)^n \mathrm{K}_n = \frac{(-1)^n 2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$$