Chapitre 0

Produit Scalaire dans l'espace

Hors Sujet

Titre : « Black Swan »

Auteur : Darren Aronofsky

Présentation succinte de l'auteur : Darren Aronofsky est né le 12 février 1969 dans une famille juive de New York. Il s'intéresse assez vite à l'art et entre à l'université Harvard pour étudier les techniques de réalisation et d'animation. Il y fait la rencontre de Sean Gullette avec qui il tourne son court métrage de fin d'études, Supermarket Sweep. En février 1996, il parvient à rassembler les 60 000 dollars nécessaires pour la réalisation de son premier long métrage, π, qui sera un véritable succès, remportant de nombreux prix et souvent classé parmi les 10 meilleurs films de l'année. Il enchaîne en 2000 avec Requiem for a dream, adaptation du roman éponyme de Hubert Selby : un film choc sur l'addiction sous toutes ses formes, montrant la décadence infernale d'un quatuor noyant son quotidien dans des visions faussées du paradis et de la célébrité, avec Jared Leto, Jennifer Connelly, Ellen Burstyn et Marlon Wayans.

En 2010, il sort Black Swan avec Natalie Portman, Vincent Cassel, Mila Kunis, Barbara Hershey et Winona Ryder, qui connaît lui aussi un grand succès et gagne de nombreux prix, notamment l'Oscar 2011 de la meilleure actrice pour Natalie Portman.

Au sujet de Black Swan : « Ce n'est donc pas par plaisir sadique ou goût de la manipulation qu'Aronofsky filme cette descente aux enfers. Il a une vraie obsession, qui lui tient à coeur, et qui le pousse à filmer : la quête de la perfection. » (Cahier du cinéma)

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : C. Aupérin
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée : Jules Fil (Carcassonne)

Table des matières

L'ESSENTIEL :

⇝

« *Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous* »
THURSTON MOORE (SONIC YOUTH)

Produit Scalaire dans l'espace

Au fil du temps

Le produit scalaire est une opération, qui a deux vecteurs associe un nombre réel. Vous l'avez découvert l'an dernier dans le plan. Nous allons ici étendre cette opération à l'espace. En gros, retenez que tout reste identique, mais avec une troisième coordonnée.
Etymologiquement, le mot « scalaire » provient du latin *scala* qui signifie échelle, historiquement le mot « scalaire » en mathématiques désigne un nombre réel. Si on veut comprendre le lien entre les deux, il faut remonter à l'empire romain. Dans les quartiers pauvres où s'élevaient de grands immeubles surpeuplés appelés *Insulae*, des échelles servaient parfois à passer d'un étage à l'autre. A l'époque, on désignait par « échelle 2 » ce qu'on appelerait aujourd'hui « étage 2 ». C'est ainsi que le mot échelle (scala) fut associé à l'idée de nombre.
Élément important de calcul en géométrie euclidienne, le produit scalaire apparaît cependant assez tard dans l'histoire des mathématiques. On en trouve trace chez Hamilton en 1843 lorsqu'il crée le corps des quaternions. Peano le définit ensuite associé à un calcul d'aire ou de déterminant. Roberto Marcolongo et Cesare Burali-Forti le définissent seulement à l'aide du cosinus d'un angle et lui donnent le nom de produit intérieur ou produit scalaire. C'est sous cette forme qu'il apparaît par la suite. Sa qualité de forme bilinéaire symétrique sera ensuite exploitée en algèbre linéaire et, de propriété, deviendra définition.
La notation du produit scalaire à l'aide d'un point ou d'une croix provient de Josiah Willard Gibbs, dans les années 1880.
Le produit scalaire possède de multiples applications. En physique, il est, par exemple, utilisé pour modéliser le travail d'une force. En géométrie analytique il permet de déterminer le caractère orthogonal de deux droites ou d'une droite et d'un plan, de caractériser les cercles, les sphères et les plans par une équation.
Rappelons également qu'en trigonométrie, il permet de linéariser les fonctions sinus et cosinus, et de généraliser les formules de valables dans un triangle rectangle aux triangles quelconques, ie qu'il permet de calculer un angle en fonction des longueur des côtés et réciproquement.

Ainsi, le produit scalaire lie l'algèbre à la géométrie, deux domaines jusqu'ici étrangers pour vous.
Vous avez remarqué au moment de l'étude de la fonction exponentielle que son mode de construction n'était pas unique : certains partent de l'équation différentielle $y' = y$, d'autres de l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x) \times f(y)$, d'autres encore de la suite de terme général $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$ ou même de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ … Pourtant, tous construisent la même fonction, car ces définitions s'avèrent équivalentes.
Il en est de même pour la fonction logarithme népérien, définie à partir de son équation fonctionnelle $f(xy) = f(x)+f(y)$, ou comme primitive de la fonction inverse, ou encore comme fonction réciproque de la fonction exponentielle.
La nature du problème étudié, le niveau d'enseignement, etc. incitent alors à préférer l'une ou l'autre des définitions.
Le produit scalaire peut aussi être défini de plusieurs manières. Nous choisirons la méthode la plus simple, prolongeant celle du plan à partir des coordonnées, pour ne pas vous faire peur.
D'où le fait de commencer ce chapitre par quelques rappels.
Nous constaterons d'ailleurs de suite que le produit scalaire de deux vecteurs dans l'espace est simplement le même que celui de ces deux vecteurs dans le plan qui les contient tous les deux (deux vecteurs étant toujours coplanaires). Le livre fait le contraire, c'est un choix. Ensuite, nous démontrerons toutes les autres caractérisations et propriétés du produit scalaire dans l'espace. Pour cela, nous munirons l'espace d'un repère orthonormé, ce qui nous permettra d'utiliser le théorème de Pythagore, et c'est tout ce dont nous aurons besoin.
Vous pourrez alors constater que toutes les propriétés du produit scalaire dans l'espace sont les mêmes que celles dans le plan (ce qui est logique au vu de la constatation précédente). Il sera donc simple de tout retenir, dans le plan comme dans l'espace.

I) Quelques rappels

I.1. Produit scalaire dans le plan

Caractérisations dans le plan

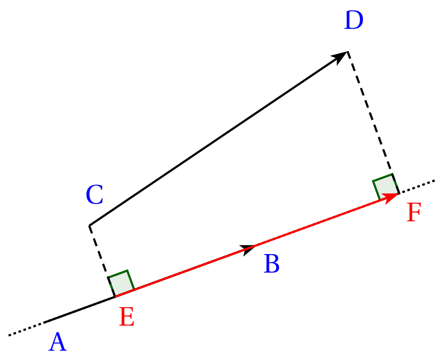
Soient $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ deux vecteurs du plan muni d'un repère orthonormé.

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u};\vec{v})$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2\right)$$

lorsque $\vec{u} \neq \vec{0}$ $\quad \vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{v}'$ où $\vec{v}'$ est le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur $\vec{u}$



Remarques :

- Le projeté orthogonal d'un point M sur une droite d est le point d'intersection de la droite d et de la perpendiculaire à d passant par M.
- Le projeté orthogonal d'un vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ sur un $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ non nul est le vecteur $\vec{v}' = \overrightarrow{HK}$ où H et K sont respectivement les projetés orthogonaux de C et D sur la droite (AB).
- Le produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique définie postive.

Théorème à retenir

Lorsque $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$ on a :

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$$

Exercice 1 : **Rappels d'une application dans le plan**

Dans cet exercice, nous allons démontrer les célèbres formules de trigonométrie suivantes.

Propriété 1.

Pour tous réels a et b on a : $\boxed{\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a \sin b}$ $(\star)$

On en déduit :

$$\boxed{\begin{array}{c}\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b \\ \sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b \\ \sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b\end{array}}$$

Ainsi que les formules de duplication :

$$\boxed{\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2} \quad \text{et} \quad \sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}}$$

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, on considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ unitaires, tels que : $(\vec{i};\vec{u}) = a$ et $(\vec{i};\vec{v}) = b$

1. Démontrons tout d'abord ($\star$).
   a. Faire le schéma d'un cercle trigonométrique, muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, et dessiner deux représentants des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ayant pour origine O.
   b. Déterminer $(\vec{u}; \vec{v})$ en fonction de a et b.
   c. En déduire que $\vec{u}.\vec{v} = \cos(a-b)$.
   d. Préciser les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ en fonction de a et b.
   e. En déduire que $\vec{u}.\vec{v} = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.
   f. En déduire que pour tous réels a et b on a $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.
   g. **Application** : En remarquant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, calculer la valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{12}$.
2. Quelle relation connue obtient-on en prenant $b = a$ dans ($\star$) ?
3. Grâce à la configuration du rectangle dans le cercle trigonométrique, retrouver les trois formules suivantes de la propriété ci-dessus.
4. Utiliser désormais ($\star$) pour retrouver les formules de duplication.
5. **Application** : A l'aide des formules de duplications, calculer les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{8}$ et $\sin \frac{\pi}{8}$.

I.2. Norme d'un vecteur dans l'espace

Dans tout ce qui suit, on considère deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

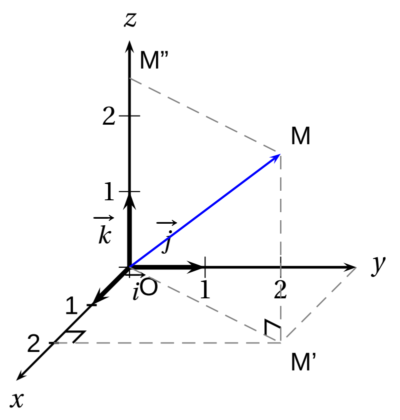
Propriété 2.

Dans un repère **orthonormé** $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ de l'espace, la norme du vecteur $\vec{u}$ est :

$$||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Preuve

Considérons le point M le point de l'espace tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$.
Alors $M(x; y; z)$, par définition des coordonnées de $\vec{u}$. On a le schéma suivant :



Comme le repère est orthonormé, on peut utiliser le théorème de Pythagore dans des plan, et calculer

$$||\vec{u}||^2 = ||\overrightarrow{OM}||^2 = OM^2$$

En effet :
$OM^2 = OM'^2 + z^2$ et d'autre part, $OM'^2 = x^2 + y^2$.
Finalement on obtient que $||\vec{u}||^2 = x^2 + y^2 + z^2$

Donc $\boxed{||u|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ car $||\vec{u}|| \geq 0$.

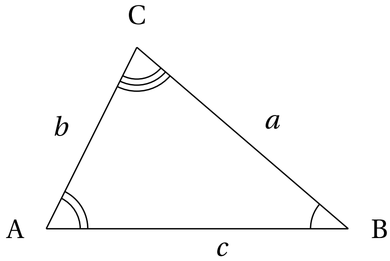
Exemple :

En précisant les repères utilisés, calculer la longueur de la diagonale

⇝ d'un cube de côté 1

⇝ d'un pavé droit de côté 1, 2 et 3.

Exercice 2 : **Rappels d'une application dans le plan et norme dans l'espace**



Soit ABC un triangle quelconque dans le plan. On note

$$\mathrm{AB} = c \quad \mathrm{BC} = a \quad \mathrm{CA} = b$$

,

$$\widehat{\mathrm{A}} = \widehat{\mathrm{BAC}} \quad \widehat{\mathrm{B}} = \widehat{\mathrm{CBA}} \quad \widehat{\mathrm{C}} = \widehat{\mathrm{ACB}}$$

1. En remarquant que $\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}$, montrer que $\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{\mathrm{A}}}$ **(Formule d'Al-Kashi)**.
2. **Application 1** : ABC est un triangle tel que $\mathrm{AB} = 4$; $\mathrm{AC} = 3$ et $(\overrightarrow{\mathrm{AB}}; \overrightarrow{\mathrm{AC}}) = 70°$.
   Calculer BC.
3. **Application 2** : ABC est un triangle tel que $\mathrm{BC} = 4$, $\widehat{\mathrm{B}} = 75°$ et $\widehat{\mathrm{C}} = 45°$
   Calculer AB et AC.
4. **Application 3** : Soient ABCD un tétraèdre régulier de côté a et I le milieu du segment [BC].
   Déterminer un valeur approchée en degré de la mesure de l'angle $\widehat{\mathrm{AID}}$

Exercice 3 : **Norme et équation cartésienne de sphère**

Dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$de l'espace :

1. Montrer que la sphère S de centre Ω et de rayon r est l'ensemble des points $\mathrm{M}(x; y)$ tels que

$$\boxed{(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 + (z - z_\Omega)^2 = r^2}$$

   où $(x_\Omega; y_\Omega; z_\Omega)$ sont les coordonnées du centre de la sphère S et r son rayon.
2. **Application 1** : Pour chacune des équations suivantes, dites si c'est l'équation d'une sphère dans l'espace.
   Si oui, préciser son centre et son rayon.

   a. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + y - 6z = -10$ **b.** $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y + 11 = 0$

3. **Application 2** : On donne les points $\mathrm{A}(-1; 2, 2)$, $\mathrm{B}(1, 2, 2)$ et $\mathrm{C}(1; -2, 2)$.
   a. i. Démontrer que les trois points A, B et C sont sur une sphère (S) de centre $\mathrm{D}(0; 0; 4)$ dont on précisera le rayon.
   ii. En déduire une équation cartésienne de (S).
   iii. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (IO) où I désigne le milieu du segment [AB].
   iv. Déterminer les points d'intersection de (OI) et de la sphère (S).
   b. i. Montrer que $\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \mathrm{OC}$.
   ii. En déduire une deuxième sphère (S') passant par A, B et C, et en donner une équation cartésienne.

Exercice 4 : **Pour aller plus loin**

Dans cet exercice, on cherche à montrer qu'il existe un infinité de sphères passant par trois points donnés.
On appelle **plan médiateur** d'un segment [AB] l'ensemble des points équidistants de A et B.

1. On reprend les points de l'application 2 de l'exercice précédent.

a. Montrer qu'un point $M(x;y;z)$ appartient au plan médiateur Π_1 de $[AB]$ si et seulement si $x=0$.

b. Montrer qu'un point $M(x;y;z)$ appartient au plan médiateur Π_2 de $[BC]$ si et seulement si $y=0$.

c. Caractériser l'intersection d de Π_1 et Π_2.

d. Que pouvez-vous en déduire sur les coordonnées du centre Ω d'une sphère (S) passant par A, B et C ?

e. Soit $E(0;0;t)$ avec $t \in \mathbb{R}$. Montrer que E est le centre d'une sphère passant par A, B et C.

f. Conclure.

2. Dans l'espace, existe-t-il toujours une infinité de sphère passant par trois points donnés ? Justifier.

3. Dans le plan, combien existe-t-il de cercle(s) passant par trois points donnés ? Justifier.

II) Diverses caractérisations du produit scalaire dans l'espace

II.1. La simplicité d'une définition analytique

Commençons par étendre la définition du produit scalaire dans le plan à l'espace muni d'un repère orthonormé.

Définition 1. (Produit scalaire dans l'Espace)

Dans un repère **orthonormé**, on appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ le nombre réel

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

Exemple :

Avec $\vec{u}(1;2;3)$ et $\vec{v}(4;5;6)$ on obtient :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 1\times4+2\times5+3\times6 = 4+10+18 = 32$$

Remarque : Si l'un des deux vecteurs $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul alors le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

Attention !

La réciproque est fausse ! En effet, soit $\vec{u}(1;2;-3)$ et $\vec{v}(-2;4;2)$ alors : $\vec{u}\cdot\vec{v} = -2+8-6 = 0$

Propriété 3.

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ on a

1. $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$
2. $(k\vec{u})\cdot\vec{v} = k(\vec{u}\cdot\vec{v}) = \vec{u}\cdot(k\vec{v})$ pour tout $k\in\mathbb{R}$
3. $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$
4. $\vec{u}\cdot\vec{u} = ||\vec{u}||^2 \geq 0$
5. $\vec{u}\cdot\vec{u} = 0 \iff \vec{u}=\vec{0}$

Remarques :

⇝ On dit que le produit scalaire est une forme **bilinéaire symétrique définie positive**.

⇝ On note aussi $\vec{u}\cdot\vec{u} = \vec{u}^2 = ||\vec{u}||^2$.

De même, si A et B sont deux points de l'espace, on a : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^2 = \left|\left|\overrightarrow{AB}\right|\right|^2 = AB^2$

Preuve

Dans un repère orthonormé de l'espace, notons $\vec{u}(x;y;z)$, $\vec{v}(x';y';z')$ et $\vec{w}(x'';y'';z'')$

1. $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx'+yy'+zz' = x'x+y'y+z'z = \vec{v}\cdot\vec{u}$
2. $\vec{u}\cdot\lambda\vec{v} = x\lambda x'+y\lambda y'+z\lambda z' = \lambda xx'+\lambda yy'+\lambda zz' = \lambda\vec{u}\cdot\vec{v} = \lambda(xx'+yy'+zz') = \lambda(\vec{u}\cdot\vec{v})$
3. $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = (x+x')x''+(y+y')y''+(z+z')z'' = xx''+x'x''+yy''+y'y''+zz''+z'z''$
   $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = xx''+yy''+zz''+x'x''+y'y''+z'z''$
   i.e $\quad(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$
4. $\vec{u}\cdot\vec{u} = x^2+y^2+z^2 = ||\vec{u}||^2 \geq 0$
5. $\vec{u}\cdot\vec{u} = 0 \Longleftrightarrow ||\vec{u}||^2 = 0 \Longleftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

Exemple :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = \left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{BD}$$

A étoffer !

Exercice(s) du livre : Déclic : 35-38-30 p 307 ?

II.2. L'indépendance du repère choisi grâce aux normes

La définition donnée du produit scalaire deux vecteurs suggère que la valeur de $\vec{u}\cdot\vec{v}$ dépend du repère choisi. En effet, les coordonnées en dépendent, de plus, nous avons précisé qu'il s'agissait de coordonnées dans un repère orthonormé.
Montrons que ceci n'est en réalité pas le cas, grâce à la nouvelle caractérisation suivante.

Théorème 1. (2^e caractérisation)

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(||\vec{u}+\vec{v}||^2-||\vec{u}||^2-||\vec{v}||^2\right)$$

Preuve

$$\begin{aligned}
||\vec{u}+\vec{v}||^2 &= (x+x')^2+(y+y')^2+(z+z')^2 = x^2+2xx'+x'^2+y^2+2yy'+y'^2+z^2+2zz'+z'^2\\
&= x^2+y^2+z^2+x'^2+y'^2+z'^2+2(xx'+yy'+zz')\\
&= ||\vec{u}||^2+||\vec{v}||^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}
\end{aligned}$$

Ce qui équivaut à

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(||\vec{u}+\vec{v}||^2-||\vec{u}||^2-||\vec{v}||^2\right)}$$

Remarque : Nous venons d'obtenir une autre caractérisation de $\vec{u}\cdot\vec{v}$ (totalement équivalente à la définition choisie).
Celle-ci définit $\vec{u}\cdot\vec{v}$ uniquement à partir de normes de vecteurs.
Or, la norme d'un vecteur ne dépend pas du repère choisi (qu'il soit orthonormé ou non, simplement, vous ne connaissez pas de formule pour la calculer dans un repère non orthonormé).
Par conséquent, le produit scalaire non plus et on peut donc le définir dans n'importe quel repère grâce à cette caractérisation.

Exemple :

A rajouter

II.3. Finalement, il s'agit de la même définition que dans le plan ...

Remarquons que cette dernière caractérisation était valable dans le plan.
Or deux vecteurs de l'espace sont toujours coplanaires. Donc, il existe un plan $\mathscr{P}$ qui contient trois points A, B et C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
On a donc :

$$\begin{aligned}
\vec{u}\cdot\vec{v} &= \frac{1}{2}\left(||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2\right) \quad \text{(produit scalaire dans l'espace)}\\
&= \frac{1}{2}\left(\left|\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|\right|^2 - \left|\left|\overrightarrow{AB}\right|\right|^2 - \left|\left|\overrightarrow{AC}\right|\right|^2\right)\\
&= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} \qquad \text{(produit scalaire dans le plan } \mathscr{P}\text{)}
\end{aligned}$$

Ainsi, le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$ *dans l'espace* n'est autre que celui *dans le plan* de deux de leurs représentants.

II.4. Autres caractérisations du produit scalaire

Théorème 2.

1. $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - ||\vec{u}-\vec{v}||^2\right)$
2. Lorsque $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$ on a : $\vec{u}\cdot\vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u};\vec{v})$
3. Lorsque $\vec{u} \neq \vec{0}$, on note $\vec{v}'$ le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur $\vec{u}$ et on a :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{v}' = \begin{cases} ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}'|| & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v}' \text{ sont de même sens}\\ -||\vec{u}|| \times ||\vec{v}'|| & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v}' \text{ sont de sens contraire}\end{cases}$$

Remarques :

- Le projeté orthogonal d'un point M sur une droite d est le point d'intersection de la droite d et de la perpendiculaire à d passant par M.
  Le projeté orthogonal d'un vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ sur un $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ non nul est le vecteur $\vec{v}' = \overrightarrow{HK}$ où H et K sont respectivement les projetés orthogonaux de C et D sur la droite (AB).
- Il s'agit de trois autres caractérisations de $\vec{u}\cdot\vec{v}$, car en réalité, elles sont équivalentes à la définition donnée.
- Pour chacune des démonstrations, on peut dire que ces caractérisations ont été démontrées en classe de Première dans le plan, et comme la définition du produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$ dans l'espace n'est autre que celle du produit scalaire dans un plan contenant deux représentants de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, elles restent valides.

Preuve **Hors Programme ?**

Expliquons tout de même comment démontrer ces caractérisations autrement :

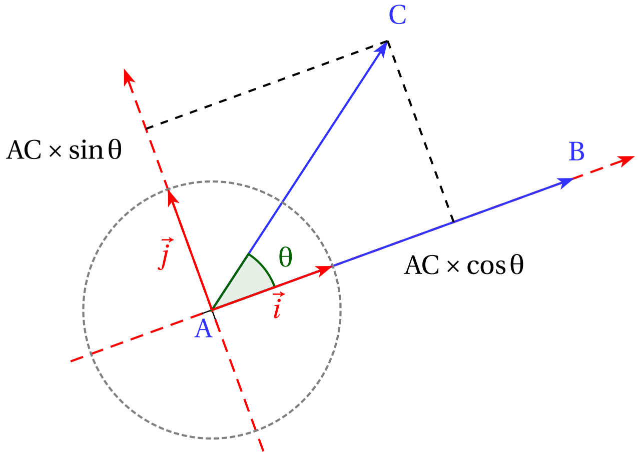
1. On calcule $||\vec{u}-\vec{v}||^2$ grâce aux coordonnées dans un repère orthonormé.
2. On se ramène à la démonstration dans le plan. Soient les points A, B et C tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$.
   On pose $\theta=(\vec{u};\vec{v})=\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$, $\vec{\imath}=\dfrac{1}{AB}.\overrightarrow{AB}$ et $\vec{\jmath}$ tel que

   $$\left(\vec{\imath};\vec{\jmath}\right)=+\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]\qquad\text{et}\qquad||\vec{\jmath}||=||\vec{\imath}||=1$$

   Le repère $\left(O,\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\right)$ est donc un repère orthonormé d'un plan contenant A, B et C.

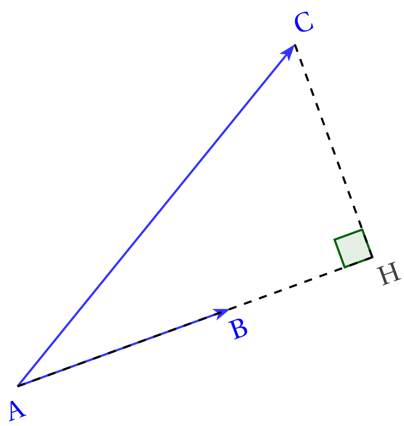
   On a alors $\vec{u}\begin{pmatrix}AB\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}AC\times\cos\theta\\AC\times\sin\theta\end{pmatrix}$

   D'où

   $$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v}&=AB\times AC\times\cos\theta+0\times AC\times\sin\theta\\&=AB\times AC\times\cos\theta\\&=||\vec{u}||\,||\vec{v}||\cos(\vec{u};\vec{v})\end{aligned}$$

3. On se ramène à la démonstration dans le plan. Soient les points A, B et C tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$.

   On note H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) ($\vec{u}\neq\vec{0}$ donc $A\neq B$).
   Ainsi $\vec{v}\,'=\overrightarrow{AH}$. On a

   $$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v}&=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\\&=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HC}\right)\\&=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HC}\end{aligned}$$

   On sait que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires. Donc

   $$\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AH}\right)=\pm1\quad\text{suivant les sens}$$

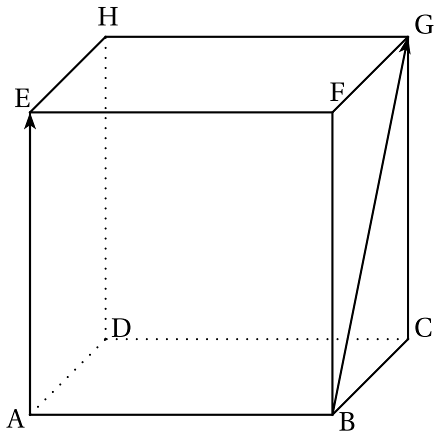
   Et on sait que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{HC}$ sont orthogonaux. Donc $\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{HC}\right)=0$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HC}=0$

   Ainsi :
   $$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v}&=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}\qquad\text{(ce qui est bien égal à }\vec{u}\cdot\vec{v}\,'\text{)}\\&=AB\times AH\times\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AH}\right)\\&=\begin{cases}AB\times AH & \text{si }\overrightarrow{AB}\text{ et }\overrightarrow{AH}\text{ sont de même sens}\\-AB\times AH & \text{sinon}\end{cases}\\&=\begin{cases}||\vec{u}||\times||\vec{v}\,'|| & \text{si }\vec{u}\text{ et }\vec{v}\,'\text{ sont de même sens}\\-||\vec{u}||\times||\vec{v}\,'|| & \text{si }\vec{u}\text{ et }\vec{v}\,'\text{ sont de sens contraire}\end{cases}\end{aligned}$$

Exemple :

On considère le cube ABCDEFGH d'arête 1. Calculer de plusieurs façons le produit scalaire $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BG}$

Solution **:**



- Dans la base orthonormale $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)$ on a :
  $\overrightarrow{AE}(0;0;1)$ et $\overrightarrow{BG}(0;1;1)$, par conséquent :
  $$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BG} = 1\times\sqrt{2}\times\cos\frac{\pi}{4} = 1$$
- Avec le cosinus :
  $$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BG} = AE\times BG\times\cos\left(\overrightarrow{AE};\overrightarrow{BG}\right) = 1^2\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$
- Avec le vecteur projeté :
  $$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AE} = AE^2 = 1^2 = 1$$

Exemple :

Soit un tétraèdre régulier ABCD de côté 1. On note I et J les milieu respectifs de [BD] et [AD].
On note K le projeté orthogonal de C sur (BA)

1. Déterminer la position de K.
2. En déduire que $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{4}$

Exercice 5 : Exercices corrigés et applications p 295 et p 297

Exercice(s) du livre : Déclic : 41-42 p 309

Exercices du livre :

n° 3-4-5 p 302 (calcul d'angle et longueur)

III) Applications : l'orthogonalité dans l'espace

III.1. Vecteurs orthogonaux

Nous allons maintenant aborder la notion qui a motivé l'introduction du produit scalaire en Terminale, à savoir l'orthogonalité de deux vecteurs.

Définition 2.

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont nuls et $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ deux de leur représentants dans un même plan.
On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** lorsque (AB) et (AC) sont perpendiculaires et on note naturellement $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Remarque : Cette définition est s'applique également dans le plan ou dans un espace de dimension supérieure à 3.

Théorème 3.

Lorsque $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$ on a :

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

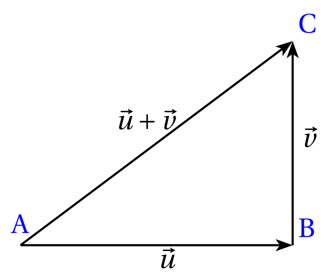
Remarque : Par convention, le vecteur nul est orthogonal à tout autre vecteur. Ceci permet de rester cohérent.
En effet, si $\vec{u} = \vec{0}$ alors pour tout $\vec{v}$ on a $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
De plus, si un vecteur $\vec{u}$ est orthogonal à tout autre vecteur, alors il est en particulier orthogonal à lui-même.
Par conséquent : $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \iff x^2 + y^2 + z^2 = \check{r} \iff x = y = z = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$

Preuve

Le plus simple reste d'utiliser la caractérisation $\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u};\vec{v})$. Comme $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$, on a

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u};\vec{v}) & \iff \cos(\vec{u};\vec{v}) = 0 \\ & \iff (\vec{u};\vec{v}) = \pm\frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \\ & \iff \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux} \end{aligned}$$

Remarque : On peut démontrer ce résultat en utilisant d'autres caractérisations de $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
Par exemple, considérons la figure suivante :



Si $\vec{u} \perp \vec{v}$, alors $(AB) \perp (BC)$ et d'après le théorème de Pythagore on a :

$$AB^2 + BC^2 = AC^2 \iff ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 = ||\vec{u}+\vec{v}||^2$$

D'où

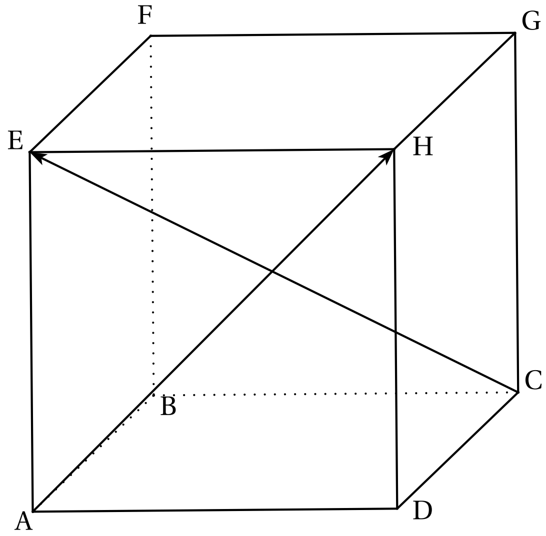
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2\right) = 0$$

Réciproque : Si $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$, alors on a :

$$\frac{1}{2}\left(||\vec{u}+\vec{v}||^2-||\vec{u}||^2-||\vec{v}||^2\right)=0 \Longleftrightarrow ||\vec{u}||^2+||\vec{v}||^2=||\vec{u}+\vec{v}||^2 \Longleftrightarrow \mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2=\mathrm{AC}^2$$

La réciproque du théorème de Pythagore assure alors que $(\mathrm{AB})\perp(\mathrm{BC})$, donc $\vec{u}\perp\vec{v}$.
La caractérisation avec les projetés orthogonaux est également commode pour démontrer ce théorème.

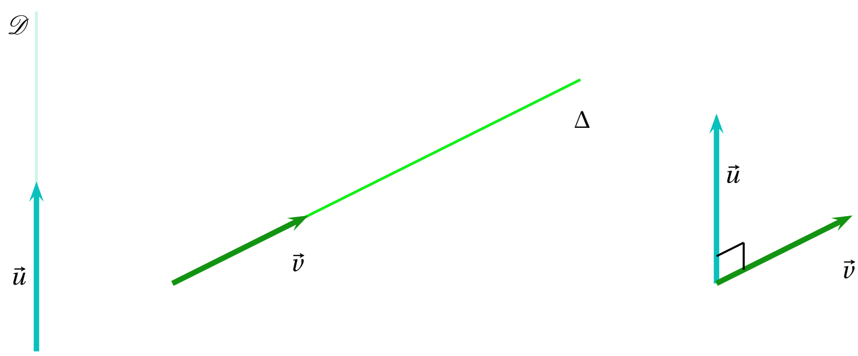
Exemple :
ABCDEFGH est un cube dont les sommets sont disposés comme sur la figure ci-dessous.
Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CE}}$ sont-ils orthogonaux ?



Solution **:**
On se place dans un repère orthonormé et on calcule $\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CE}}$ avec les coordonnées.

Définition 3. (Propriété)

Soient $\mathscr{D}$ une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et $\mathscr{D}'$ une droite de vecteur directeur $\vec{v}$.
On dit que les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont **orthogonales** et on note $\mathscr{D}\perp\mathscr{D}'$ lorsque $\vec{u}\perp\vec{v}$ ie lorsque $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$



Remarque : Deux droites perpendiculaires sont orthogonales, mais la réciproque n'est pas vraie, car ces droites peuvent être non coplanaires.

Exemple :
On considère un tétraèdre régulier ABCD régulier d'arête a. (*chaque face est un triangle équilatéral de côté a*) Démontrer que deux arêtes opposées sont orthogonales.

Solution :
Démontrons ce résultat pour les arêtes [AC] et [BD] (compte tenu de la symétrie de la figure, cela suffira à démontrer le résultat voulu).

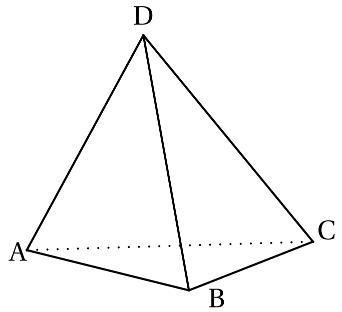
$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = \left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)\cdot\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}$
$= -\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}$

De plus $\quad \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD} = BA\times BD\times\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}a^2$

Et $\quad \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD} = BC\times BD\times\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}a^2.$

Ainsi :

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = -\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2} = 0$$



Exercice(s) du livre : Déclic : 45 p 309

III.2. Orthogonalité d'une droite et d'un plan

Théorème 4. (Définition)

Si une droite Δ est orthogonale à deux droites **sécantes** d'un plan $\mathscr{P}$, alors Δ est orthogonale à toute droite du plan $\mathscr{P}$.
On dit que Δ est **orthogonale** à $\mathscr{P}$ et on note naturellement $\Delta\perp\mathscr{P}$

Preuve

Soient $\vec{u}$ un vecteur directeur de Δ et d_1 et d_2 deux droites sécantes de $\mathscr{P}$, de vecteurs directeurs $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$.
Par hypothèse, on a $= 0 = \vec{u}\cdot\vec{v_2}$.
Or, toute droite $\mathscr{D}$ du plan $\mathscr{P}$ est dirigée par un vecteur $\vec{w}$ tel que

$$\vec{w} = a\vec{v_1}+b\vec{v_2} \quad \text{avec } a,b\in\mathbb{R}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{w} &= \vec{u}\cdot\left(a\vec{v_1}+b\vec{v_2}\right)\\ &= a\vec{u}\cdot\vec{v_1}+b\vec{u}\cdot\vec{v_2}\\ &= a\times0+b\times0=0\end{aligned}$$

Donc $\Delta\perp\mathscr{D}$.

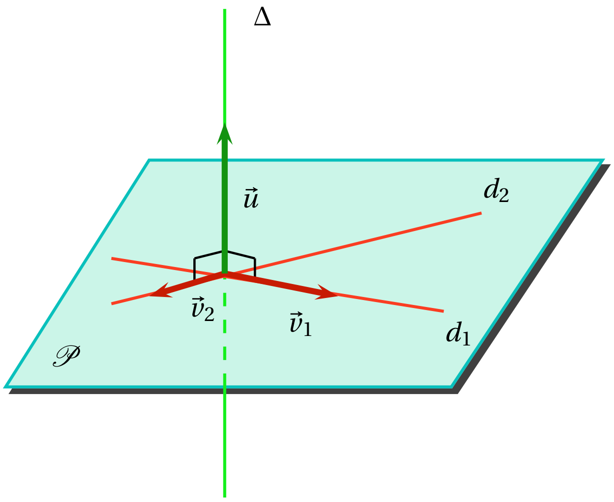
Corollaire 1.

Soit Δ une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et $\mathscr{P}$ un plan de vecteurs directeurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$.

Δ et le plan $\mathscr{P}$ sont orthogonaux si et seulement si $\begin{cases}\vec{u}\perp\vec{v}_1\\ \vec{u}\perp\vec{v}_2\end{cases}$ ie si et seulement si $\begin{cases}\vec{u}\cdot\vec{v}_1=0\\ \vec{u}\cdot\vec{v}_2=0\end{cases}$

Preuve

Simple traduction du théorème en terme de vecteurs directeurs.



Remarques :

⇝ Cela revient en fait à dire que $\mathscr{D} \perp \mathscr{P} \iff$ pour tous points M et N de $\mathscr{P}$ on a $\vec{u} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MN}} = 0$

⇝ Tout plan admet au moins une droite qui lui est orthogonale.

Exemple :

A rajouter

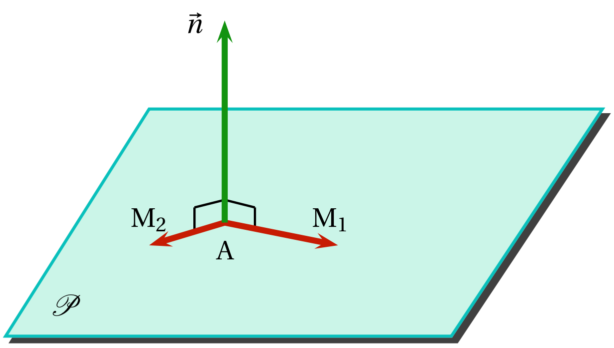
Exercice(s) du livre : Déclic : 49-53-54 p 310

III.3. Vecteur normal d'un plan

Une droite est caractérisée par la donnée d'un point et d'un vecteur directeur.
Le problème pour un plan, c'est qu'on a besoin a priori d'un point et de deux vecteurs pour indiquer sa direction.
Cependant, si un plan a deux vecteurs directeurs, nous allons montrer qu'il n'a qu'une seule « direction orthogonale »
Donc un plan sera entièrement déterminé par la donnée d'un point et d'un vecteur orthogonal à celui-ci.

Définition 4.

Etant donné un plan $\mathscr{P}$, on appelle **vecteur normal** à $\mathscr{P}$ tout vecteur directeur d'une droite orthogonale à $\mathscr{P}$.



Remarque : Par définition, on a donc désormais qu'une droite d est orthogonale à un plan $\mathscr{P}$ si et seulement si un vecteur directeur de d est colinéaire à un vecteur normal de $\mathscr{P}$.

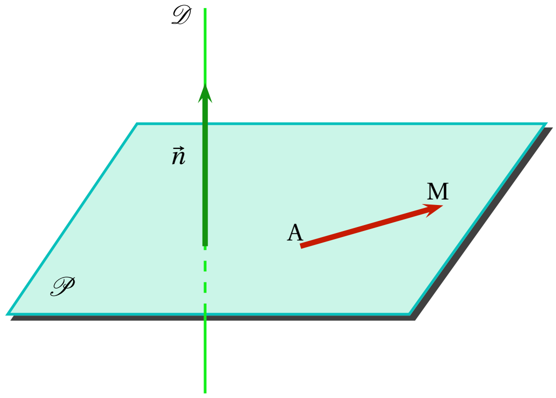
IV) Caractérisation d'un plan et conséquences

IV.1. L'importance d'un vecteur normal

Proposition 1.

Le plan P qui passe par A et de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des points M de l'espace tel que :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$



Preuve

On doit montrer que

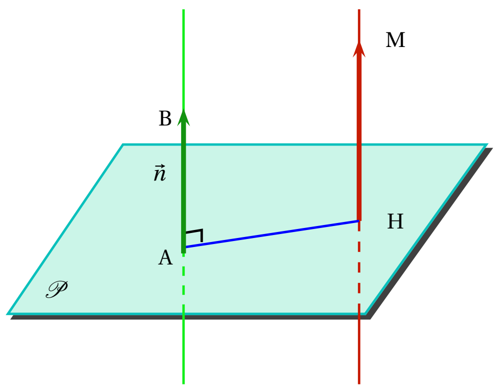
- Pour tout point M du plan P,

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

- Réciproquement, si M est un point de l'espace tel que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$, alors $M \in P$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Soit M un point de $\mathscr{P}$. Il est clair que si $\vec{n}$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}$, alors il dirige une droite d orthogonale à $\mathscr{P}$.
D'après le théorème précédent, d est orthogonale à toute droite de $\mathscr{P}$, donc en particulier à (AM).
Ainsi on a bien $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.
$\boxed{\Longleftarrow}$ Pour démontrer la réciproque, raisonnons par l'absurde :
Supposons que M soit un point de l'espace tel que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ mais $M \notin \mathscr{P}$.
Soit B le point tel que $\vec{n} = \overrightarrow{AB}$. Ainsi $B \notin \mathscr{P}$ et $(AB) \perp \mathscr{P}$.
On note H l'intersection de $\mathscr{P}$ avec la parallèle à (AB) passant par M. Ainsi $(AH) \in \mathscr{P}$ donc $(AH) \perp (AB)$.
Notons de plus que $(HM)//(AB)$. Alors :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} &= \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} \\
&= \left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}\right) \cdot \overrightarrow{AB} \\
&= \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{AB} \\
&= \overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{AB} \quad \text{car } (AH) \perp (AB) \\
&= \pm HM \times AB \quad \text{car } (HM)//(AB)
\end{aligned}$$



Or $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \iff \pm HM \times AB \iff H = M$ car $A \neq B$. Mais $H \in \mathscr{P}$ et nous avons fait l'hypothèse $M \notin \mathscr{P}$. Cette hypothèse est donc absurde.
Par conséquent, $M \in \mathscr{P}$.

Remarques :

- On en déduit que tout vecteur orthogonal à $\vec{n}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{P}$
- Ceci va nous permettre d'établir des critères simples de positions relatives, ainsi que des équations cartésiennes de plan.

Exemple :

On considère le plan médiateur Π d'un segment $[AB]$ de milieu I : Π est l'ensemble des points de l'espace équidistants de A et B.

1. Démontrer que $M \in \Pi \iff \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = 0$
2. Démontrer que Π est l'ensemble des points M de l'espace qui vérifient $\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$
3. En déduire que $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal de Π.

IV.2. Equation cartésienne d'un plan

Travail de l'élève **1.** Dans un repère orthonormé de l'espace, on donne $A(1;2;3)$ et $\vec{n}(1;-3;1)$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur les coordonnées d'un point M pour qu'il appartienne au $\mathscr{P}$ passant par A et orthogonal à $\vec{n}$.

Solution **:**

Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace. On a alors :

$$M \in \mathscr{P} \iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \iff (x-1) - 3(y-2) + (z-3) = 0 \iff x - 3y + z + 2 = 0$$

Pour que M appartiennent à $\mathscr{P}$, il faut et il suffit que ses coordonnées vérifient l'équation $x - 3y + z = -2$.
On dit que $\mathscr{P}$ a donc pour équation $\quad x - 3y + z = -2$

Théorème 5.

Dans un repère **orthonormé** $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, tout plan $\mathscr{P}$ admet une équation (dite **cartésienne**) de la forme :

$$ax + by + cz = d$$

avec a, b, c des réels non tous nuls et d un réel.
De plus le vecteur $\vec{n}(a;b;c)$ est normal à $\mathscr{P}$

Preuve

Notons $A(x_A;y_A;z_A)$ un point de P et $\vec{n}(a;b;c)$ un vecteur normal à P, alors on a :

$$M(x;y;z) \in P \iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

i.e

$$a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A) = 0 \iff ax - ax_A + by - by_A + cz - cz_A = 0 \iff ax+by+cz = \underbrace{ax_A + by_A + cz_A}_{d}$$

En posant $d = ax_A + by_A + cz_A$ qui est une constante, on obtient le résultat désiré.

Remarques :

⇝ Notons que l'équation d'un plan dans l'espace n'est pas unique.
En effet si $P : x + y + z = 1$ alors P a aussi pour équation $2x + 2y + 2z = 2$.

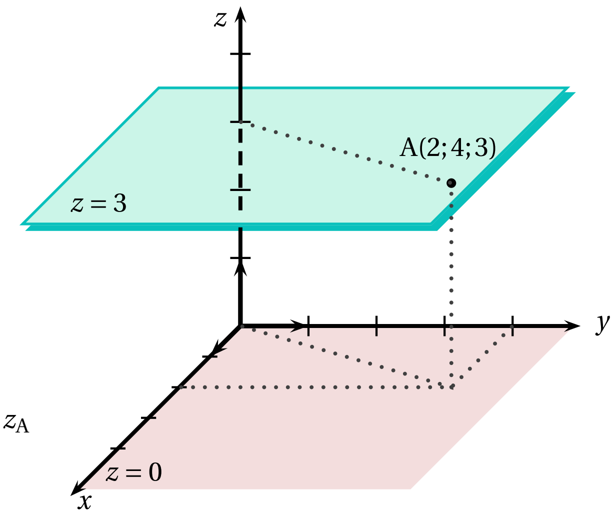
⇝ **Quelques cas particuliers dans un repère orthonormé :**

Le plan $(\mathrm{O}xy)$ **a pour équation** $z=0$**.**
En effet $\mathrm{O}(0;0;0) \in (\mathrm{O}xy)$ et $\vec{k}(0;0;1)$ est normal à ce plan, ainsi :

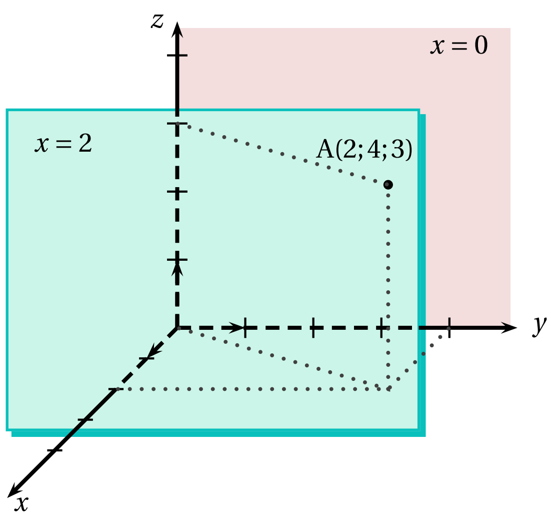
$$\mathrm{M}(x;y;z) \in (\mathrm{O}xy) \iff \overrightarrow{\mathrm{OM}} \cdot \vec{k} = 0 \iff z=0$$

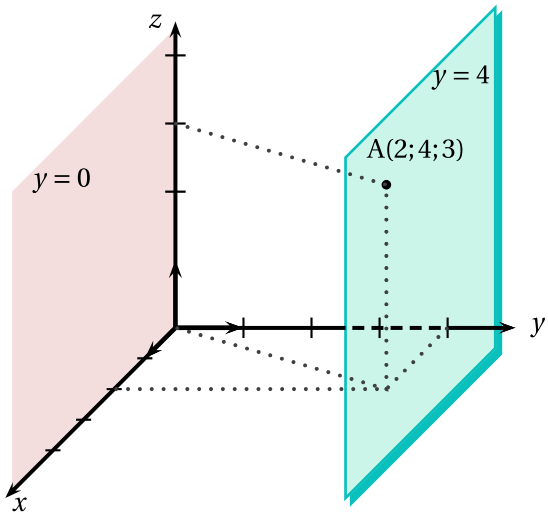
On peut montrer de même que tout plan $\mathscr{P}$ parallèle au plan $(\mathrm{O}xy)$ a une équation du type $z=d$ où d est une constante.
En effet soit $\mathrm{A}(x_\mathrm{A};y_\mathrm{A};z_\mathrm{A})$ un point de $\mathscr{P}$. Comme $\vec{k}(0;0;1)$ est normal à $\mathscr{P}$, on a :

$$\mathrm{M}(x;y;z) \in \mathscr{P} \iff \overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \vec{k} = 0 \iff z-z_\mathrm{A}=0 \iff z=z_\mathrm{A}$$



De la même manière les plans $(\mathrm{O}xz)$ et $(\mathrm{O}yz)$ ont respectivement pour équation $y=0$ et $x=0$.
De plus, tout plan parallèle à $(\mathrm{O}xz)$ admet une équation du type $y=d$ où d est une constante.
Et tout plan parallèle à $(\mathrm{O}yz)$ admet une équation du type $x=d$ où d est une constante.





Exemples :

Dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ de l'espace,

- Donner une équation cartésienne du plan passant par le point $\mathrm{B}(-2;1;3)$ et orthogonal à $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ avec $\mathrm{A}(1;-2;2)$ et $\mathrm{C}(4;1;-1)$.
- Démontrer que le plan passant par les points $\mathrm{A}(a;0;0)$, $\mathrm{B}(0;b;0)$ et $\mathrm{C}(0;0;c)$ a pour équation cartésienne : $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$

Théorème 6.

Dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ de l'espace, l'ensemble (E) des points M de l'espace dont les coordonnées vérifient l'équation $ax+by+cz=d$ avec a, b, c et d des réels tels que $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}(a;b;c)$.

Attention !

L'ensemble des points $M(x; y; z)$ vérifiant l'équation $ax + by = c$ avec a, b et $c \in \mathbb{R}$ est une droite dans le plan, mais dans l'espace, il s'agit d'un plan ! (parallèle au plan d'équation (Oxy), donc à l'axe (Oz))
Dans l'espace, on définit les droites par des équations paramétriques, ou encore comme des intersections de deux plans (donc un système de deux équations cartésiennes)

Preuve

Supposons par exemple que $a \neq 0$. Alors le point $\left(\frac{d}{a}; 0; 0\right)$ vérifie l'équation donc appartient à (E), qui est donc non vide.
Si $A(x_A; y_A; z_A) \in (E)$ alors $ax_A + by_A + cz_A = d$.
Ainsi pour tout point $M(x; y; z) \in (E)$ on a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} &= a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) \\ &= ax + by + cz - ax_A + by_A + cz_A \\ &= d - d = 0\end{aligned}$$

Donc (E) est le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Exercice(s) du livre : Déclic : 55 à 63 p 311

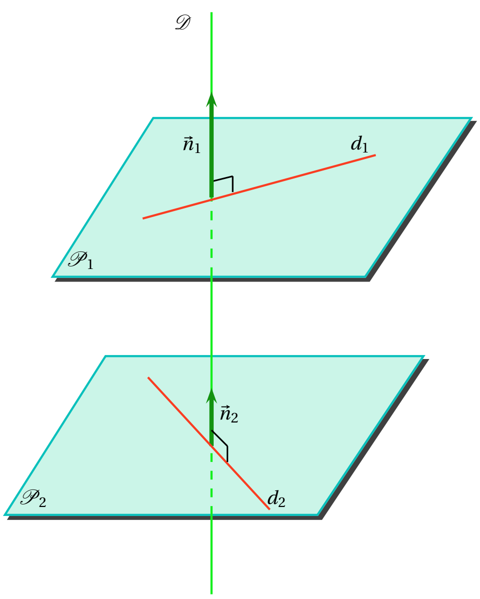
IV.3. Applications aux positions relatives dans l'espace

On a donné en début d'année les définitions suivantes :
- ⇝ Une droite d est parallèle à un plan $\mathscr{P}$ lorsque un vecteur directeur de d est un vecteur directeur de $\mathscr{P}$.
- ⇝ Deux plans sont parallèles lorsqu'ils ont un même couple de vecteurs directeurs.

Grâce aux vecteurs normaux, on peut désormais affirmer les propositions suivantes.

Proposition 2.

- ⇝ Une droite d est parallèle à un plan $\mathscr{P}$ si et seulement si un vecteur directeur de d est orthogonal à un vecteur normal de $\mathscr{P}$.
- ⇝ Deux plans sont parallèles si et seulement si deux de leur vecteurs normaux sont colinéaires.



Remarque : Les droites d_1 et d_2 sont non coplanaires et pas forcément orthogonales ou parallèles.

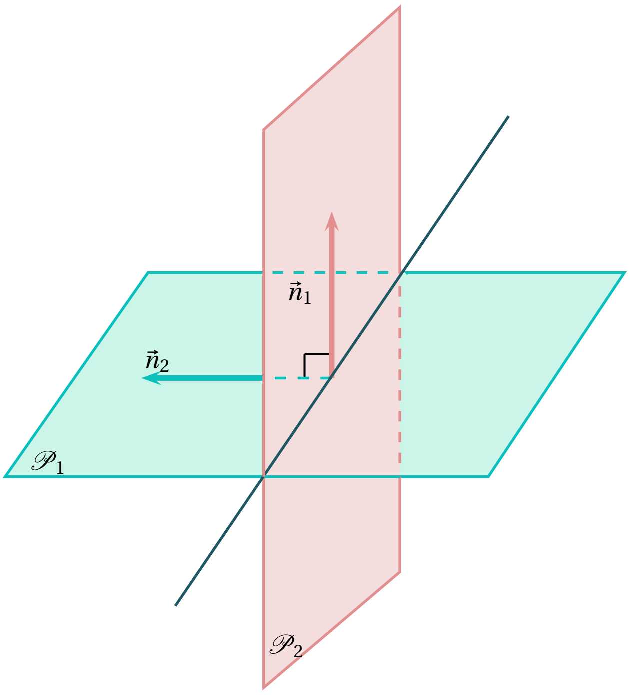
Preuve

- Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de d et $\vec{n}$ un vecteur normal de $\mathscr{P}$.
  $d // \mathscr{P} \Longrightarrow \vec{u}$ dirige $\mathscr{P}$. D'où $\vec{n} \perp \vec{u}$.
  Réciproque : Supposons maintenant que $\vec{u} \perp \vec{n}$. Soit A un point de $\mathscr{P}$ et B le point de l'espace tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.
  On a $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \iff \overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 0$.
  D'après la caractérisation d'un plan, on a $B \in \mathscr{P}$, donc $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ dirige $\mathscr{P}$.
- Soient deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ de couples de vecteurs directeurs respectifs $(\vec{u};\vec{v})$ et $\left(\vec{u}';\vec{v}'\right)$.
  Si $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles, alors $(\vec{u};\vec{v})$ est aussi un couple de vecteurs directeurs de $\mathscr{P}'$.
  Donc si $\vec{n}$ est un vecteur normal de $\mathscr{P}$, il est orthogonal à chacun des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ donc au plan $\mathscr{P}'$.
  Réciproque : Soient $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ des vecteurs normaux respectifs des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ tels que $\vec{n}' = k\vec{n}$.
  On a $\vec{n}' \cdot \vec{u} = k\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ et $\vec{n}' \cdot \vec{v} = k\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$.
  Donc $\vec{n}'$ est un vecteur normal de $\mathscr{P}$.
  Soit A un point de $\mathscr{P}$ et B le point tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}'$.
  On a $\vec{n}' \cdot \vec{u}' = 0 \iff \vec{n}' \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.
  D'après la caractérisation de $\mathscr{P}$, on en déduit que $B \in \mathscr{P}$. Donc $\overrightarrow{AB} = \vec{u}'$ dirige $\mathscr{P}$.
  De même on montre que $\vec{v}'$ dirige $\mathscr{P}$.
  Ainsi $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ ont un même couple de vecteurs directeurs. Ils sont bien parallèles.

Définition 5.

Deux plans de l'espace sont dits **orthogonaux** lorsque leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.

Remarque : On aurait pu définir de manière équivalente l'orthogonalité de deux plans par rapport à l'orthogonalité des vecteurs de leur couples de vecteurs directeurs, mais c'était se compliquer la tâche inutilement.



Remarque : En particulier, $\vec{n}_1$ est un vecteur directeur de $\mathscr{P}_2$ et $\vec{n}_2$ est un vecteur directeur de $\mathscr{P}_1$.

Corollaire 2.

Dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, soient deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{R}$ d'équations

$$\mathscr{P} : ax+by+cz+d=0 \qquad \text{et} \qquad \mathscr{R} : a'x+b'y+c'z+d'=0$$

1. $\mathscr{P} // \mathscr{R} \iff (a,b,c)$ et (a',b',c') sont proportionnels.
2. $\mathscr{P} \perp \mathscr{R} \iff aa'+bb'+cc'=0$.

Preuve

1. $\mathscr{P} // \mathscr{Q} \iff \vec{n}(a;b;c) = k\vec{n'}(a';b';c')$
2. $\mathscr{P} \perp \mathscr{Q} \iff \vec{n} \perp \vec{n'} \iff \vec{n} \cdot \vec{n'} = 0 \iff aa'+bb'+cc'=0$

Exemples :

Dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

1. On donne les plans suivants : $\mathscr{P} : 3x+2y-4z=36$, $\mathscr{R}_1 : -\frac{1}{4}x-\frac{1}{6}y+\frac{1}{3}z=21$ et $\mathscr{R}_2 : -5x+6y-\frac{3}{4}z=3$
   - **a.** Montrer que les plans sont parallèles.
   - **b.** Montrer que les plans $\mathscr{P}$ et sont orthogonaux.
   - **c.** Montrer alors de deux manières différentes que $\mathscr{R}_1$ et $\mathscr{R}_2$ sont orthogonaux.
2. On donne les équations cartésiennes de deux plans $\mathrm{P} : x-4y+7=0$ $\qquad$ $\mathrm{Q} : x+2y-z+1=0$.
   - **a.** Montrer que ces plans sont sécants.
   - **b.** On note d leur droite d'intersection. On dit que la droite d est représentée par le système d'équation : $\begin{cases} x-4y+7=0 \\ x+2y-z+1=0 \end{cases}$, puisqu'un point $\mathrm{M} \in d$ si et seulement si ses coordonnées vérifient le système.
     Déterminer une équation paramétrique de d en posant $y=t$ (par exemple).
   - **c.** En déduire un vecteur directeur de d.

Exercice 6 : Quelle est l'équation générale d'un plan parallèle au plan $(x\mathrm{O}y)$?

Solution **:**

Le plan $(x\mathrm{O}y)$ a pour équation $z=0$ et le plan P cherché a une équation du type :

$$ax+by+cz+d$$

D'après le corollaire précédent on sait que (a,b,c) et $(0,0,1)$ sont proportionnels, donc $a=0$ et $b=0$, par conséquent le plan P a une équation du type (avec $c \neq 0$) :

$$cz+d=0 \iff z=-\frac{d}{c}$$

Exercice 7 : Quelle est l'équation générale d'un plan perpendiculaire au plan $(x\mathrm{O}y)$?

Solution :

Soit P un tel plan avec $\vec{n}(a;b;c)$ un vecteur normal, il a donc une équation de la forme :

$$ax+by+cz+d=0$$

Mais (xOy) a pour équation $z=0$ et donc pour vecteur normal $\vec{n'}(0;0;1)$, donc d'après le corollaire on a :

$$\vec{n}\cdot\vec{n'}=0 \Longleftrightarrow 0a+0b+c=0 \Longleftrightarrow c=0$$

D'où le plan P a une équation de la forme :

$$ax+by+d=0$$

Exercice 8 : Soit $P : 2x-z=0$ et $d : \begin{cases} x=t-1 \\ y=-3t \\ z=2 \end{cases}$ où $t\in\mathbb{R}$.

Déterminer les coordonnées du point $A=P\cap d$.

Solution :

Soit $\vec{n}(2;0;-1)$ un vecteur normal de P et $\vec{u}(1;-3;0)$ un vecteur directeur de d, assurons nous que le point A existe :

$$\vec{n}\cdot\vec{u}=2\neq 0$$

Par conséquent A existe nous pouvons déterminer ces coordonnées, en résolvant l'équation suivante :

$$2(t-1)-2=0 \Longleftrightarrow 2t-2-2=0 \Longleftrightarrow t=2$$

Ainsi, en remplaçant dans le système paramétrique de d on obtient $A(2-1;-3:times2;2)$ i.e $A(1;-6;2)$.

Exercice 9 : On donne $A(1;-1;0)$, $B(0;-1;1)$, $C(3;-2;0)$ et $D(2;-3;3)$.

Etudier l'intersection des droites (AB) et (CD).

Solution :

$\overrightarrow{AB}(-1;0;1)$ est un vecteur directeur de (AB). Donc la droite (AB) admet la représentation paramétrique suivante : $(AB) : \begin{cases} x = -t+1 \\ y = -1 \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

De même $\overrightarrow{CD}(-1;-1:3)$ par conséquent la droite (CD) admet la représentation paramétrique suivante : $(CD) : \begin{cases} x = -t'+3 \\ y = -t'-2 \\ z = 3t' \end{cases} \quad t' \in \mathbb{R}$

On résout le système : $\begin{cases} -t+1 = -t'+3 \\ -1 = -t'-2 \\ t = 3t' \end{cases} \iff \begin{cases} -t = -t'+2 = 1+2 = 3 \Rightarrow t = -3 \\ t' = -1 \\ t = 3t' = -3 \end{cases}$

La troisième équation est compatible avec les deux premières, nous pouvons donc affirmer :

- le système admet une solution, donc les droites ont une intersection non vide, elles sont coplanaires.
- Le système admet une unique solution qui est le couple $(t;t') = (-3;-1)$ donc les droites sont sécantes en un point A, dont on obtient les coordonnées en remplaçant t ou t' dans l'une des représentations paramétriques de d ou d' :

$$A(4;-1;-3)$$

Exercice 10 : Donner une représentation paramétrique de la droite d définie, intersection des plans P et Q d'équations respectives :

$$P : 2x+y-z-2=0 \qquad \text{et} \qquad Q : x+3y+7z-11=0$$

Solution :

On peut (même si l'énoncé de l'exercice suggère que la droite d existe) s'assurer que P et Q sont sécants.
$\vec{n}(2;1;-1)$ est un vecteur normal de P et $\vec{n'}(1;3;7)$ est un vecteur normal de Q, P et Q sont sécants si et seulement si $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ ne sont pas colinéaires, si c'était le cas, alors on aurait $\vec{n} = k\vec{n'}$, dans ce cas on aurait :

$$2 = k \qquad \text{et} 1 = 3 = k \Rightarrow k = \frac{1}{3}$$

ce qui absude, donc P et Q sont deux plans sécants.
Comme $2x+y-z-2=0 \Longrightarrow y = 2x+z+2$, ainsi :

$$x+3(2x+z+2)+7z-11=0 \Longleftrightarrow 7x+10z-5=0 \Longleftrightarrow z = -0,7x+0,5$$

Et du coup :

$$y = 2x-0,7x+0,5+2 = 0,3x+2$$

En posant $x = t$, on obtient :

$$d : \begin{cases} x = t \\ y = 0,3t+2 \\ z = -0,7t+0,5 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Exercice 11 : Déterminer l'intersection des plans P, Q et R avec :

$$P : 2x+3y-2z-2=0 \qquad \text{ou} \qquad Q : 4x-3y+z-4=0 \qquad \text{ou} \qquad R : 2x+12y-7z-2=0$$

Solution **:**

Si $\mathrm{M}(x;y;z)$ appartient à l'intersection des trois plans alors x, y et z vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} 2x+3y-2z=2 \\ 4x-3y+z=4 \\ 2x+12y-7z=2 \end{cases}$$

De la deuxième équation on tire : $z=4-4x+3y$ et en reportant dans les équations 1 et 3 on obtient :

$$\begin{cases} 2x+3y-2(4-4x+3y)=2 \\ 2x+12y-7(4-4x+3y)=2 \end{cases} \iff \begin{cases} 10x-3y-10=0 \\ 30x-9y-30=0 \end{cases}$$

On constate alors qu'il suffit de multiplier la première par 3 pour obtenir la deuxième, donc ces deux équations se résument à une seule :

$$x=\frac{3}{10}y+1$$

Posons alors $y=10t$ (avec t réel), d'où :

$$x=3t+1 \qquad \text{et} \qquad z=18t$$

Ainsi, les solutions du système sont les triplets x, y, z tels que :

$$\begin{cases} x=3t+1 \\ y=10t \\ z=18t \end{cases} \qquad t\in\mathbb{R}$$

Il s'agit de la représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}(\mathrm{A};\vec{u})$ avec $\mathrm{A}(1;0;0)$ et $\vec{u}(3;10;18)$.

Exercice 12 : exercice corrigé et application p 299

Exercice(s) du livre : Déclic : 50-64-65-67-68-71-74-79 p 310
81-83-85-86-89-90-97-100-106 p 314

Trouver des annales ! !