

## 1) Au fil de l'histoire

### I.1. Une fonction transformant les produits en sommes

Au début du XVII<sup>e</sup> siècle, les mesures astronomiques, nécessaires à la navigation par exemple ou à l'étude du mouvement des planètes, engendrent des calculs ... astronomiques ! et particulièrement fastidieux à effectuer à la main. Pour simplifier ces calculs, on cherche à réaliser des tables numériques à deux colonnes, mettant en correspondance les nombres de telle manière que pour effectuer une multiplication, il suffira d'effectuer une addition, beaucoup plus simple ! *Il est en effet plus aisé de calculer  $113 + 254$  que  $113 \times 254$ .*

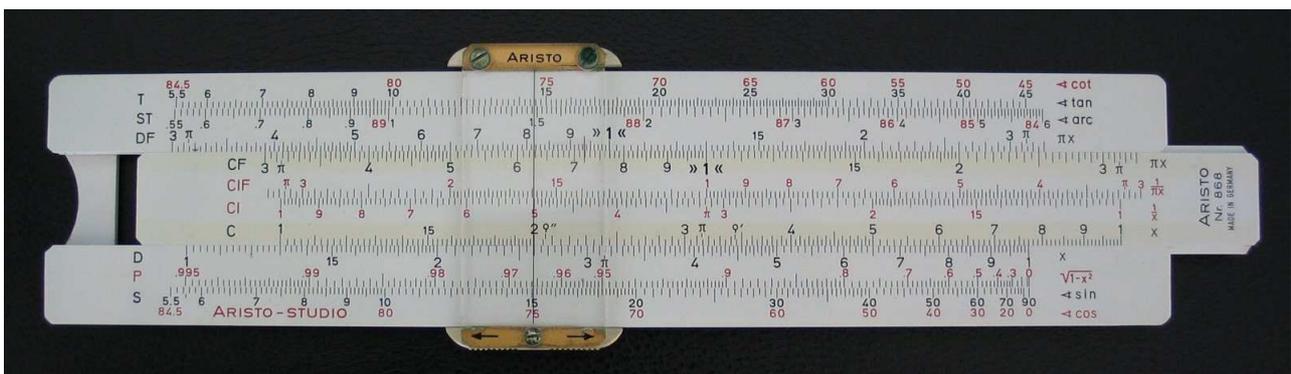
Il s'agit de réaliser une fois pour toutes ces calculs fastidieux, puis de mettre les tables à disposition des calculateurs. Les mathématiciens ont donc été amenés à rechercher les fonctions  $f$  transformant les produits en sommes, ie à résoudre l'équation fonctionnelle  $f(a \times b) = f(a) + f(b)$  (l'inconnue étant la fonction  $f$ ).

En 1614, l'écossais John NAPIER (en français Jean Néper..) établit une telle table de calcul, qu'il appelle Tables de Logarithmes (arithmos=nombres, logos=raison, rapport). Ces tables eurent immédiatement un très grand succès, et d'autres tables furent très vite publiées, comme celle de Briggs très proche de celle ci-dessous.

**TABLE DES LOGARITHMES,**  
*DES NOMBRES PREMIERS, DEPUIS 1 JUSQU'A 1300, EXCLUSIVEMENT,*  
**AVEC QUINZE DÉCIMALES.**

Numbr.	LOGARITHMES.	Numbr.	LOGARITHMES.	Numbr.	LOGARITHMES.	Numbr.	LOGARITHMES.
1	00000 00000 00000 0	241	58201 70423 74868 3	377	76117 58151 33751 4	957	97173 95903 87778 2
2	50102 99936 65981 1	234	59967 57214 84058 1	387	76865 81012 47614 4	944	97338 96254 27236 9
3	47712 12347 19662 4	237	40993 51255 51294 3	395	77303 46953 64262 6	947	97634 99790 05275 4
5	69897 00045 56018 8	265	41993 37484 89737 8	399	77742 68223 89511 3	933	97909 29006 58526 4
7	84309 80400 14236 8	269	42973 22800 02407 9	601	77887 44720 02739 3	967	98342 64740 85001 6
11	04159 26831 58223 0	274	45296 92908 74403 7	607	78518 86910 75237 3	974	98721 92299 08004 8

Elles furent massivement utilisées pour les calculs pendant plus de trois siècles, et permirent la création des règle à calculs, ancêtre de la calculatrice (mais pas si ancien que cela puisque M. Neibecker a passé son bac avec, quoique ...) très précises et permettant toutes sortes de calculs.



Elles furent détrônées à la fin du XX<sup>e</sup> par la mise sur le marché de calculatrices performantes.

**Travail de l'élève 1.** Voici deux exemples de tables logarithmiques :

$x$	$f(x)$
2	0.30103
...	...
10	1
...	...
20	1.30103
...	...
	1.5
40	
...	...
100	
...	...
	52

Pour déterminer le produit de deux nombres  $a$  et  $b$  :

- on lit dans la table  $f(a)$  et  $f(b)$
- on calcule facilement  $f(a) + f(b)$
- on cherche dans la table quel image par  $f$  vaut cette somme,
- on lit alors dans la table l'antécédent correspondant. Il s'agit de  $a \times b$ !

$x$	$f(x)$
0.25	
0.5	
1	
1.25	
1.5	
2	0.6931
	1
3	1.0986
4	1.3863
5	
6	
24	
30	

### 1. Première table :

- a. Vérifier que la multiplication de deux nombres de la colonne de gauche correspond à l'addition de deux nombres de la colonne de droite.
- b. Quels nombres doit-on mettre dans la colonne de droite en face de 40 ? de 100 ?
- c. Quel nombre doit-on écrire dans la colonne de gauche en face de 52 ? Que constatez-vous ?
- d. Proposer une méthode pour trouver la valeur exacte de l'antécédent de 1.5 par la fonction  $f$ , sans calculatrice.  
On dit que le résultat est la **moyenne géométrique** de 10 et 100.

La fonction décrite dans la première table s'appelle **Logarithme décimal**, noté **Log**, et est très utilisée en sciences (mesure du pH, magnitude des étoiles, niveau sonore en décibels, en musique avec le spectre sonore, en électronique, en radioactivité ...)

Elle a également permis à Richter d'exprimer la magnitude d'un séisme sur une échelle, dite logarithmique, très connue et très pratique pour faire référence à la force d'un séisme.

On retrouve ce type d'échelle en géographie, pour l'étude des dynamiques de populations.

### 2. Deuxième table : il s'agit également d'une table logarithmique, donc la multiplication de deux nombres de la colonne de gauche correspond encore à l'addition de deux nombres de la colonne de droite.

- a. Expliquer pourquoi  $f(2) + f(2)$  ne vaut pas exactement  $f(4)$ .
- b. Quels nombres doit-on mettre dans la colonne de droite en face de 6 ? de 24 ? 1 ?
- c. Compléter les cases de droite en face de 0.5 et 0.25. Que constate-t-on ?
- d. En déduire la case de droite en face de 1.5.
- e. Expliquer pourquoi on ne peut pas obtenir l'image de 5 par cette fonction facilement ? et celle de 30 ?  
Pour obtenir l'image de 5, on procède par dichotomie.

On calcule la moyenne arithmétique de  $f(4)$  et  $f(6)$  :  $\frac{f(4) + f(6)}{2} \approx 1.58903$ .

Puis on calcule l'antécédent de ce nombre, qui est la moyenne géométrique de 4 et 6, ie  $\sqrt{4 \times 6} = \sqrt{24} < 5$ .

Et on recommence avec ce procédé en prenant comme nombre de départ  $\sqrt{24}$  et 6, car  $\sqrt{24} < 5 < 6$ , jusqu'à obtenir une précision convenable.

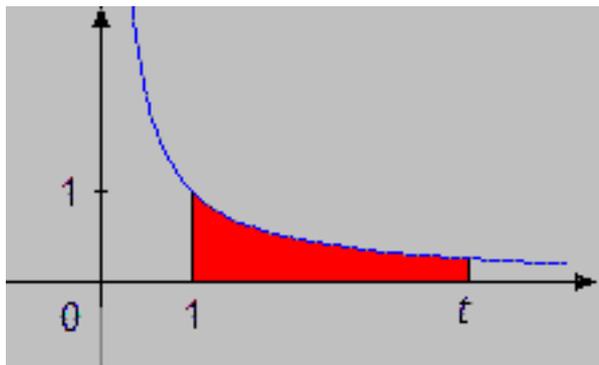
Cette méthode suggère évidemment que la fonction logarithme décrite est continue, et utilise le théorème des valeurs intermédiaires.

- f. On donne  $f(5) \approx 1.60948$ . En déduire  $f(30)$  et  $f(1.25)$ .
- g. Comment calculer à l'aide de cette table  $1.25 \times 24$  sans effectuer de multiplication ?

La fonction décrite dans la deuxième table s'appelle **Logarithme Népérien**, noté **Ln**, en hommage à John, même si sa table n'était pas celle-ci. C'est la seule fonction logarithme que nous étudierons dans ce chapitre.

## I.2. Une Primitive de la fonction inverse

On date en général la naissance du logarithme népérien de 1647, date à laquelle Grégoire de Saint-Vincent travaille sur la quadrature de l'hyperbole (la recherche d'un carré ayant la même aire que la surface située sous l'hyperbole)



Il démontre que la fonction obtenue vérifie la propriété des fonctions logarithmes (transformation d'un produit en somme). Mais lui-même ne voit pas le lien avec les logarithmes inventés par John.

La fonction  $\ln$  s'est d'ailleurs appelée un certain temps fonction logarithme hyperbolique, compte tenu de sa découverte comme aire sous l'hyperbole.

On l'a également appelé logarithme naturel lorsque, en 1668, Nicolaus Mercator met en place une méthode de calcul assez simple de ses valeurs. Le calcul des autres logarithmes apparaît alors bien compliqué et le logarithme népérien devient le plus naturel...

Avant 2005, en Terminale S, on parlait de ce problème de quadrature, et on définissait le logarithme népérien comme la fonction qui à tout  $t > 0$  associe l'aire géométrique de la surface comprise entre la hyperbole, l'axe des abscisses et les droites d'équation  $x = 1$  et  $x = t$ .

Nous verrons dans un prochain chapitre que cela implique que le logarithme népérien est la primitive de la fonction inverse qui s'annule en 1, ie que  $\ln'(x) = \frac{1}{x}$  pour tout  $x > 0$  et  $\ln(1) = 0$ . Nous démontrerons ici ce dernier résultat, mais en partant d'une autre définition de la fonction.

### Remarques :

- Vous pouvez constater que dans vos tableaux de dérivées, vous n'aviez aucune fonction donc la dérivée valait  $x^{-1} = \frac{1}{x}$  alors que vous en aviez pour n'importe quelle fonction du type  $x^n$  avec  $n \in \mathbb{Z}$  différent de 1.
- Donner une autre primitive de la fonction inverse.

## I.3. La fonction réciproque de la fonction exponentielle

Une dizaine d'années plus tard (1676), Newton envoie une lettre à Leibniz dans lesquelles il ose enfin écrire le premier exposant fractionnaire (et en expression littérale s'il vous plait!) et en donne une signification. Dès la lettre suivante, il en vient aux exposants irrationnels. Cependant il n'en donne aucune définition ni calcul approché.

Leibniz s'empare de ce concept et présente pour la première fois en 1678 un exposant variable dans une expression,  $x^y$ . Mais, il n'en explique pas la signification non plus.

En 1679, il confie à Huygens qu'il a encore du mal à exploiter des équations de la forme  $x^x - x = 24$  (cela à l'air hyper simple non pourtant?!).

La notation  $a^{\frac{p}{q}}$  se généralise cependant et les exposants commencent à être perçus comme des logarithmes (des produits revenant à des sommes). La notion prend peu à peu corps jusqu'à se voir qualifiée d'exponentielle.

En 1690-1691, Leibniz confie à Huygens que de telles expressions ne sont plus obscures. Il les relie explicitement aux logarithmes expliquant que pour tout  $a > 0$ , on a  $\ln(a) = x \iff a = b^x$  où  $b$  est une constante telle que  $\ln(b) = 1$ . C'est la première apparition du nombre transcendant  $e$ , bien que personne ne le sache encore.

La fonction exponentielle a été étudiée en tant que telle en 1697 par Jean Bernoulli et c'est ainsi que les fonctions exponentielles firent leur entrée dans le monde des mathématiques. Pour le nombre  $e$ , il a fallu encore attendre un siècle avec Euler ...

Et c'est désormais ainsi qu'en Terminale S, on aborde la fonction logarithme : comme la fonction *réciproque* de la fonction exponentielle. Place au cours!