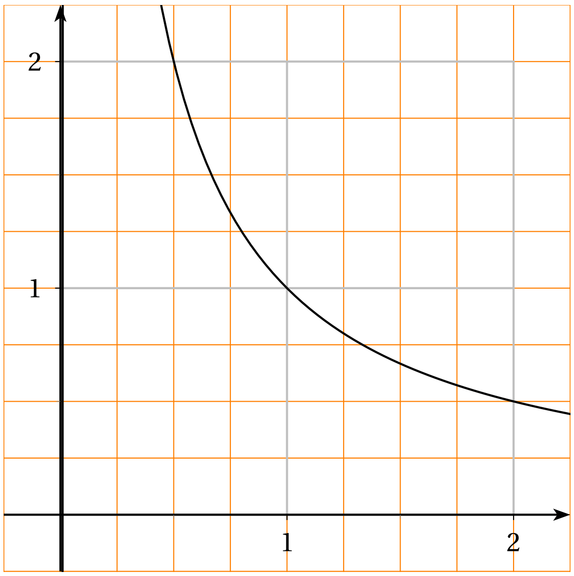
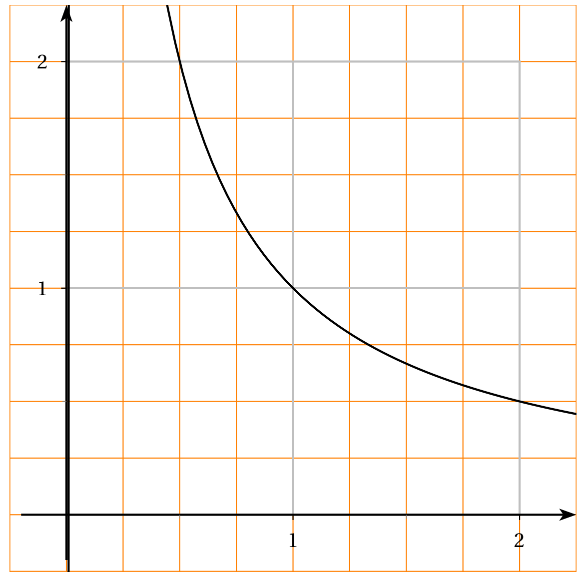
Travail de l'élève **1.** Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(t) = \dfrac{1}{x}$. On a dessiné ci-dessous sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$.

1. Comment encadrer l'aire $\mathscr{A}$ comprise entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$?





2. On a finalement découpé l'intervalle $[1;2]$ en quatre sous-intervalles de même amplitude $\dfrac{1}{4}$.

a. Justifier que :

$$\frac{f\left(1+\frac{1}{4}\right)+f\left(1+\frac{2}{4}\right)+f\left(1+\frac{3}{4}\right)+f\left(1+\frac{4}{4}\right)}{4} \leq \mathscr{A} \leq \frac{f(1)+f\left(1+\frac{1}{4}\right)+f\left(1+\frac{2}{4}\right)+f\left(1+\frac{3}{4}\right)}{4}$$

b. On a effectué les calculs ci-contre à l'aide du logiciel Xcas.
En déduire un encadrement de $\mathscr{A}$ entre deux décimaux avec deux chiffres après la virgule.

```
1  f(x):=1/x
                                   x -> 1/x
2  approx(somme(f(1+k/4),k,0,3))
                                   3.0380952381
3  approx(somme(f(1+k/4),k,1,4))
                                   2.5380952381
4  approx(somme(f(1+k/1000),k,0,999))
                                   693.39724306
5  approx(somme(f(1+k/1000),k,1,1000))
                                   692.89724306
```

3. Soit $n \geq 1$. On découpe l'intervalle $[1;2]$ en n sous-intervalles de même amplitude.

a. Généraliser la méthode précédente pour obtenir un encadrement de $\mathscr{A}$ dans ce cas, en fonction de n.

b. Déduire des autres résultats du logiciel Xcas un encadrement plus précis de $\mathscr{A}$, en précisant en le nombre n utilisé.

4. On propose l'algorithme ci-contre.

a. Qu'affiche l'algorithme quand on rentre la valeur $n = 4$?

b. Que fait-il ?

c. Pour $n = 10$, il renvoit la valeur 0.05, pour $n = 20$, la valeur 0.025, pour $n = 50$, la valeur 0.01.
Justifier que l'amplitude de l'encadrement de $\mathscr{A}$ lorsque l'on découpe l'intervalle $[1;2]$ en n sous-intervalles de même amplitude est $\dfrac{1}{2n}$.

d. Quelle était la meilleure amplitude obtenue jusqu'à présent ?

e. Pour quelles valeurs de n obtient-on un encadrement de $\mathscr{A}$ à 0.0001 près ?

f. Modifier l'algorithme pour qu'il vous en procure un.

```
VARIABLES
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  k EST_DU_TYPE NOMBRE
  U EST_DU_TYPE NOMBRE
  V EST_DU_TYPE NOMBRE
  E EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE n
  U PREND_LA_VALEUR 0
  V PREND_LA_VALEUR 1/n
  POUR k ALLANT_DE 1 A n-1
    DEBUT_POUR
    U PREND_LA_VALEUR U+1/(n+k)
    V PREND_LA_VALEUR V+1/(n+k)
    FIN_POUR
  U PREND_LA_VALEUR U+1/(2*n)
  E PREND_LA_VALEUR V-U
  AFFICHER E
FIN_ALGORITHME
```

5. Pour tout $t > 1$, on note $\mathrm{S}(t)$ l'aire de la portion de plan délimitée par l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = 1$ et $x = t$ et la courbe $\mathscr{C}_f$.
Soient a et h deux réels tels que $a \geq 1$ et $h > 0$.

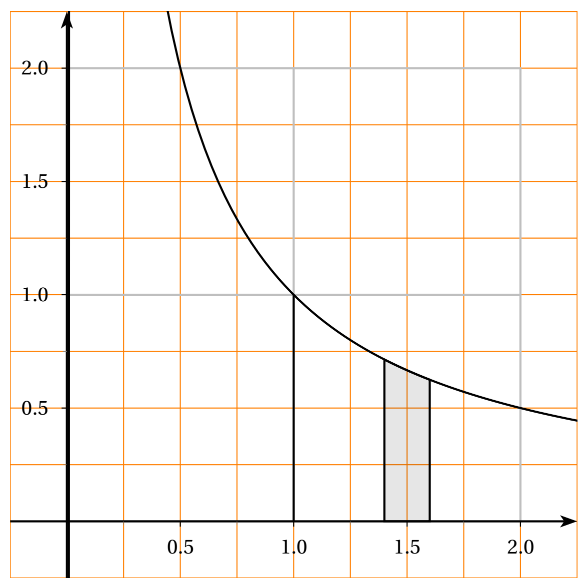
a. En utilisant deux rectangles bien choisis, montrer que

$$\frac{1}{a+h} \leq \frac{\mathrm{S}(a+h) - \mathrm{S}(a)}{h} \leq \frac{1}{a}$$

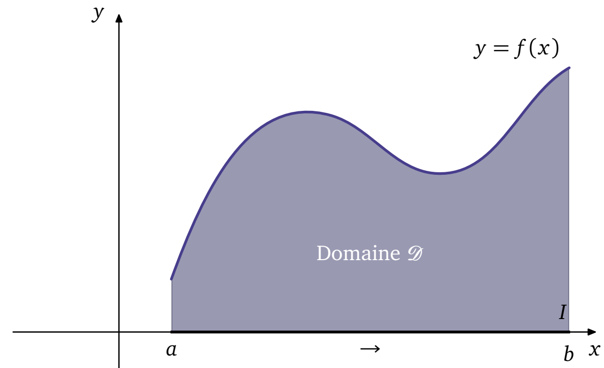
b. Proposer une conclusion.

c. En déduire une valeur exacte possible pour $\mathscr{A}$ et contrôler sa cohérence avec l'encadrement trouvé précédemment.

d. Proposer une valeur exacte pour l'aire du dommaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 3$ et $x = 5$.



I.3. Somme de Riemann et notation

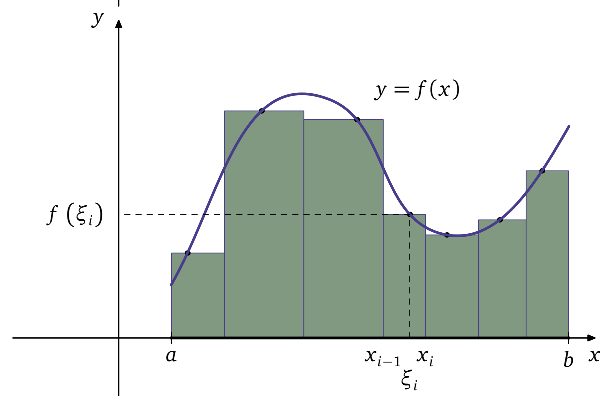


But : Calculer l'aire du domaine $\mathscr{D}$

L'objectif du chapitre est donc de déterminer l'aire (en u.a) d'un domaine $\mathscr{D}$ définit par :

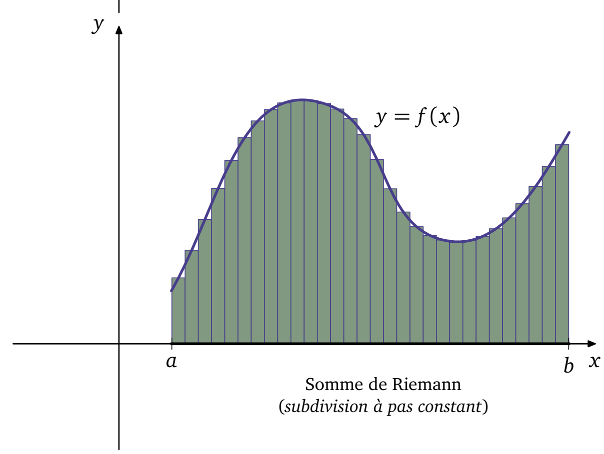
$$\mathscr{D} = \{\mathrm{M}(x; y) \in \mathscr{P} \text{ tel que } a \leq x \leq b \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\}$$

où f est une fonction continue sur l'intervalle $[a; b]$.



Somme de Riemann

On doit à Riemann l'idée d'approcher l'aire de $\mathscr{D}$ par celles de rectangles sommées.



Somme de Riemann
(*subdivision à pas constant*)

$n = 30$

Il s'aperçoit que si l'on divise l'intervalle $[a; b]$ en n sous-intervalles, avec n très grand, alors on obtient une valeur approchée de l'aire de $\mathscr{D}$.
Il choisit des intervalles de même amplitude et il affirme :

$$\mathscr{A}(\mathscr{D}) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} \times f(\zeta_i)$$

En effet, la largeur de chacun des rectangles est $\dfrac{b-a}{n}$, et leur longueur est donnée par l'image du réel $f(\zeta_i)$.

On peut maintenant comprendre la notation choisie par les mathématiciens :

- Lorsque n tend vers $+\infty$ chaque subdivision sur l'axe des abscisses est infiniment petite est vaut $\dfrac{b-a}{n}$. Pour le symboliser on note dx.
- Lorsque n tend vers $+\infty$ on considère donc une somme infinie, que l'on note avec un S déformé : $\displaystyle\int_a^b$
- Comme chaque subdivision est infiniment petite, on considère $f(\zeta_i)$ où ζ_i prend toutes les valeurs de $[a; b]$.

Ainsi on écrit logiquement :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} \times f(\zeta_i) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Exemples :

1. On considère une fonction f constante égale à $k \geq 0$.

   a. Proposer une valeur pour $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ dans le cas particulier où $k = 0$, puis pour $k = 1$.

   b. Même question dans le cas général.

2. On considère une fonction affine f positive sur le segment $[a; b]$ et définie par $f(x) = mx + p$

   a. Représenter graphiquement la fonction f définie sur $[1; 8]$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$.

   Déterminer alors $\displaystyle\int_1^8 \left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\right) dx$

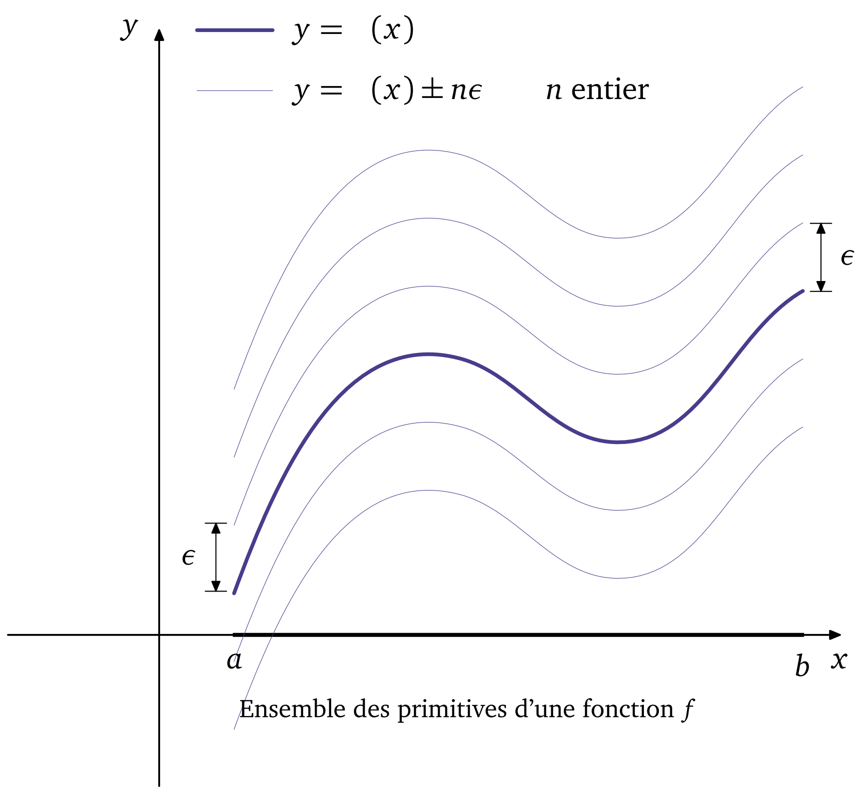
   b. Proposer une valeur pour $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ dans le cas général.

3. Soit f la fonction définie sur $[-1; 1]$ par $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

   a. Vérifier que la courbe $\mathscr{C}_f$ représentant f est le demi-cercle de centre O et de rayon 1 qui est situé dans le demi-plan des ordonnées positives.

   b. En déduire que

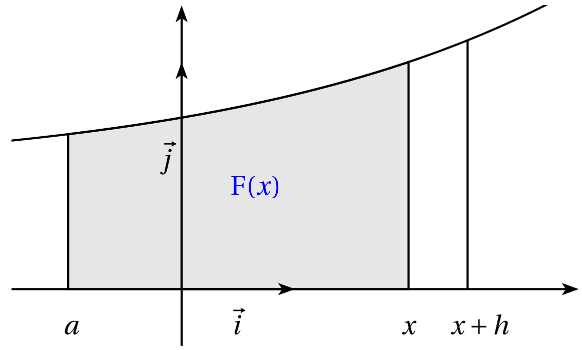
$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx = \frac{\pi}{4}$$



Ensemble des primitives d'une fonction f

***Travail de l'élève* 2.**

On considère une fonction f continue, positive et croissante sur l'intervalle $[a;b]$. Soit F la fonction suivante :



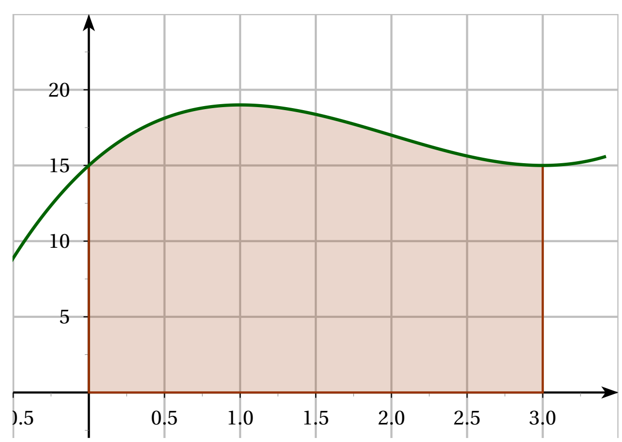
$$\begin{array}{rcccl} \mathrm{F} & : & [a;b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt \end{array}$$

1. Soit h un réel strictement positif.
   a. En utilisant la relation de Chasles, montrer que $\mathrm{F}(x+h) - \mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_x^{x+h} f(x)\,dx$.
   Hachurer l'aire correspondante sur le graphique.
   b. En utilisant deux rectangles bien choisis, montrer que

$$f(x) \leq \frac{\mathrm{F}(x+h) - \mathrm{F}(x)}{h} \leq f(x+h)$$

2. Répondre aux mêmes question pour $h < 0$.
3. Quelle hypothèse sur f nous permet d'affirmer que $\lim\limits_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$?
4. Que pouvez-vous en déduire sur la fonction F ?
5. Que vaut F(a) ?
6. Conclure.
7. **Application** : proposer une valeur possible pour $\displaystyle\int_2^4 t^2\,dt$.
   Est-on sûr qu'il s'agisse de la bonne ?

***Travail de l'élève* 3.** Un problème d'aplanissement.
Loic possède un terrain qu'il souhaite aplanir en rabotant les bosses et en comblant les creux.
Comme il est radin, il ne souhaite pas faire venir de la terre ou des pierres de l'extérieur, et ne veut pas non plus en évacuer hors de son terrain.
En coupe, le terrain ressemble à la figure ci-contre.
A quelle altitude va se trouver le terrain de Loïc ?



Primitives des fonctions de référence		
Fonction f	**Primitive** F, $c \in \mathbb{R}$	**Intervalle** I
$f(x) = k$ (constante)		
$f(x) = x$		
$f(x) = ax + b$ (a et b réel)		
$f(x) = \frac{1}{x^2}$		
$f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{Z}$ et $n \neq -1$)		Si $n \geq 0$: Si $n \leq -2$:
$f(x) = \frac{1}{x}$		
$f(x) = e^x$		
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$		
$f(x) = \cos x$		
$f(x) = \sin x$		

Opération sur les primitives

u et v sont des fonctions dérivables sur un intervalle I

Fonction	Une Primitive	Conditions
$u' + v'$		
ku' (k constante)		
$u'u^n$		
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$		
$\frac{v'}{v^2}$		
$u'e^u$		
$\frac{u'}{u}$		

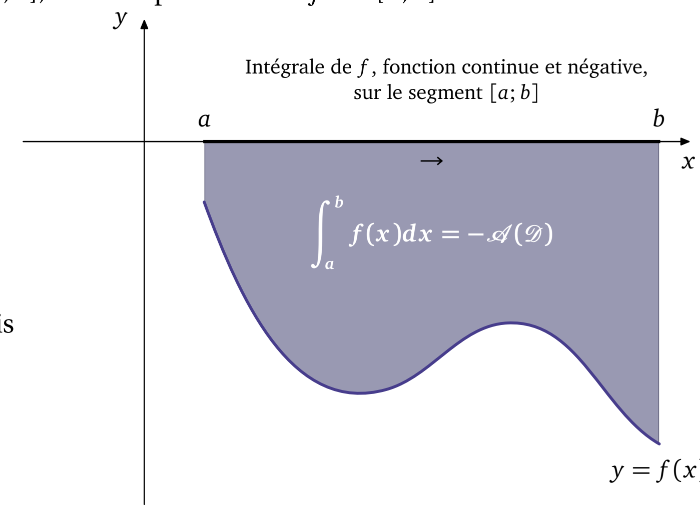
IV.3. Interprétation graphique

On considère une fonction f continue sur un intervalle $[a;b]$, et F une primitive de f sur $[a;b]$.

– Si f est négative sur $[a;b]$, alors $f=-|f|$ et donc

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b -\mid f(x)\mid dx = -\int_a^b |f(x)|dx$$

Ainsi, $\int_a^b f(x)dx$ est l'aire du domaine habituel, mais comptée négativement.



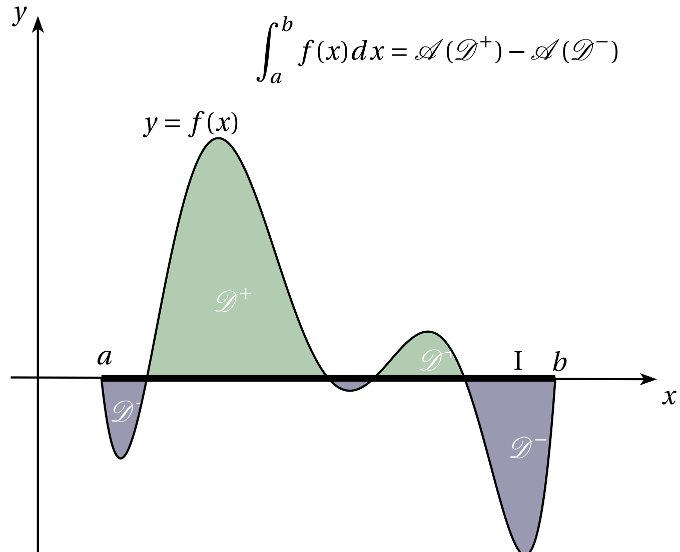
– Si f est de signe quelconque sur $[a;b]$, on définit f comme somme de deux nouvelles fonctions :

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \geq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad f^-(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \geq 0 \\ f(x) \text{ sinon} \end{cases}$$

Ainsi $f(x)=f^+(x)+f^-(x)$ pour tout $x \in \mathrm{I}$, avec f^+ positive et f^- négative sur I. D'où

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \int_a^b \left(f^+(x)+f^-(x)\right)dx \\ &= \int_a^b f^+(x)dx + \int_a^b f^-(x)dx \end{aligned}$$

En d'autres termes $\int_a^b f(x)dx$ se calcule en comptant positivement l'aire des domaines où f est positive et négativement l'aire des domaines où f est négative.



Intégrale d'une fonction f de signe quelconque sur $[a;b]$