Travail de l'élève **1.**

1. Démontrer que les propositions suivantes sont fausses :
   a. « Aujourd'hui tout est fabriqué en Chine »
   b. « Un quadrilatère dont les diagonales sont de même longueur est un rectangle »
2. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on considère la proposition $\mathscr{P}(n)$: « L'entier $n^2 - n + 11$ est premier » ie qu'il admet exactement deux diviseurs (1 et lui-même).
   a. La proposition $\mathscr{P}(1)$ est-elle vraie ?
   b. Faire un tableau de valeurs à la calculatrice de l'expression $n^2 - n + 11$ pour n allant de 1 à 10.
   Que dire de $\mathscr{P}(2)$? $\mathscr{P}(3)$? $\mathscr{P}(4)$? $\mathscr{P}(10)$?
   c. La proposition $\mathscr{P}(n)$ est-elle vraie pour tout entier naturel n ?

Travail de l'élève **2.** Considérons la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$$

Chaque terme de cette suite se calcule à partir du précédent. On dit que cette suite est définie **par récurrence**.

But : *On souhaiterait pouvoir calculer n'importe quel terme sans avoir à calculer chacun des précédents, ie conjecturer une formule* ***explicite*** *de u_n en fonction de n et la démontrer pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

1. Pour quel type de suites définies par récurrence connaissez-vous des formules explicites ?
   La suite (u_n) est-elle de l'un de ces types ? *Justifier*
2. Calculer à la main les premiers termes de la suite jusqu'à u_5.
3. Etablir à la calculatrice le tableau de valeurs de (u_n) et vérifier vos résultats.
4. La plupart des calculatrices n'affichent pas dans leur tableau une valeur exacte à partir de u_{20}.
   Grâce aux premières lignes de ce tableau, conjecturer la valeur exacte de u_{33} et u_{34}.
5. Ces résultats sont-ils certains ? Que faudrait-il faire pour les vérifier ?
6. Quelqu'un a eu le courage de se lancer dans cette vérification et a trouvé $u_{33} = 8\,589\,934\,591$, mais pour u_{34}, sa calculatrice ne donne qu'une valeur approchée.
   Vérifier à la calculatrice votre conjecture pour u_{33}, puis, sans calculatrice, vérifier votre conjecture sur u_{34}.
7. Conjecturer une formule explicite pour calculer u_n. Ce résultat est-il certain pour tout $n \in \mathbb{N}$?
8. Notons $\mathscr{P}(n)$ la proposition définie pour $n \in \mathbb{N}$, par : $\mathscr{P}(n)$: « $u_n = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ »
   Mettre en place un raisonnement analogue à celui des dominos pour démontrer que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Problème d'introduction

On dispose d'une infinité de dominos, placés « debouts » les uns à la suite des autres et on numérote leur position dans l'ordre.
On cherche les éventuelles conditions pour être sûr de les faire tous tomber à la chaîne.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note $\mathscr{P}(n)$ la propriété (dépendant de n)

$$\mathscr{P}(n) : \text{« le } n^{\text{ième}} \text{ domino tombe. »}$$

1. A quelle(s) condition(s) $\mathscr{P}(1)$ est-elle vraie ?
2. Même question pour $\mathscr{P}(2)$, $\mathscr{P}(3)$, $\mathscr{P}(4)$, puis $\mathscr{P}(10)$ et enfin $\mathscr{P}(65\,468)$.
3. A quelle(s) condition(s) $\mathscr{P}(n)$ est-elle vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$?

Exemple :

Compléter la démonstration par récurrence suivante, afin de montrer que la somme des n premiers entiers non nuls vaut $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

On note $\mathscr{P}(n)$ la proposition «

- **Initialisation :** pour $n =$
  La somme des n premiers entiers non nuls vaut
  Et $\dfrac{n(n+1)}{2} =$
  Donc $\mathscr{P}(\ldots)$ est vraie.
- **Hérédité :** On suppose qu'il existe un entier $k \geq \ldots$ tel que $\mathscr{P}(k)$ est vraie, ie tel que l'on a
  On cherche à montrer $\mathscr{P}(k+1)$: «
  Or $\quad 1+2+3+\cdots+\cdots+(k+1) \quad =$

  $=$

  $=$
  Donc $\mathscr{P}(\ldots\ldots)$ est vraie. La proposition est
- **Conclusion** La proposition est .... et ....
  Elle est donc vraie pour tout $n \geq$