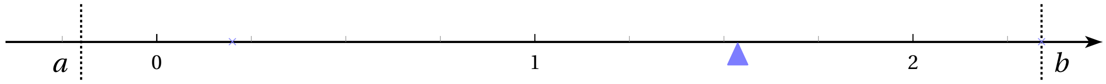
Travail de l'élève 1 : Un curseur se positionne au hasard entre les abscisses a et b. On note X son abscisse.



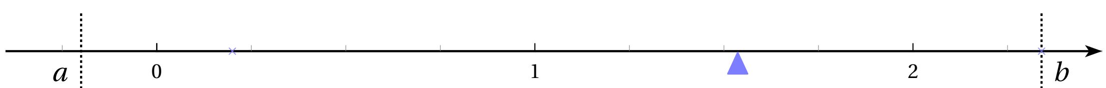
Cette expérience revient à choisir au hasard un réel de l'intervalle $[a;b]$.
On admet que les réels sont uniformément répartis et donc que les issues sont équiprobables.
On cherche à modéliser cette expérience (univers et loi de probabilité associée).

1. Préciser l'univers Ω de cette expérience.
   En quoi se distingue-t-il des univers déjà rencontrés ?
2. Rappeler ce que signifie « définir une loi de probabilité » lorsque Ω est un ensemble fini.
3. Voyons si cette approche « point par point » est généralisable ici.
   a. Lequel des événements suivants vous paraît le plus probable :

   X est le milieu de $[a;b]$, $X=1$, $X=0$ ou $X=3$?

   b. Conjecturer une probabilité à leur associer. Expliquer succinctement pourquoi il ne peut en être autrement.
   c. Conclure.
4. **a.** On découpe l'intervalle $[a;b]$ en quatre sous-intervalles de même amplitude.
   Quelle est que la probabilité que le curseur s'arrête dans le quart supérieur ?
   b. Quelle est la probabilité que le curseur s'arrête dans l'intervalle $[0;1]$? et dans l'intervalle $]0;1[$?
   c. Déterminer de même $P(X \in [0.45;0.55])$, $P(3 \leq X \leq 4])$ et $P(-3 \leq X \leq 3]$?
   d. Soit c et d deux réels de l'intervalle $[a;b]$.
   En généralisant votre raisonnement, proposer des probabilités pour $P(X \in [c;d])$, $P(X \in]c;d])$, $P(X \leq c)$, $P(X > c)$.

Travail de l'élève 1 : Un curseur se positionne au hasard entre les abscisses a et b. On note X son abscisse.



Cette expérience revient à choisir au hasard un réel de l'intervalle $[a;b]$.
On admet que les réels sont uniformément répartis et donc que les issues sont équiprobables.
On cherche à modéliser cette expérience (univers et loi de probabilité associée).

1. Préciser l'univers Ω de cette expérience.
   En quoi se distingue-t-il des univers déjà rencontrés ?
2. Rappeler ce que signifie « définir une loi de probabilité » lorsque Ω est un ensemble fini.
3. Voyons si cette approche « point par point » est généralisable ici.
   a. Lequel des événements suivants vous paraît le plus probable :

   X est le milieu de $[a;b]$, $X=1$, $X=0$ ou $X=3$?

   b. Conjecturer une probabilité à leur associer. Expliquer succinctement pourquoi il ne peut en être autrement.
   c. Conclure.
4. **a.** On découpe l'intervalle $[a;b]$ en quatre sous-intervalles de même amplitude.
   Quelle est que la probabilité que le curseur s'arrête dans le quart supérieur ?
   b. Quelle est la probabilité que le curseur s'arrête dans l'intervalle $[0;1]$? et dans l'intervalle $]0;1[$?
   c. Déterminer de même $P(X \in [0.45;0.55])$, $P(3 \leq X \leq 4])$ et $P(-3 \leq X \leq 3]$?
   d. Soit c et d deux réels de l'intervalle $[a;b]$.
   En généralisant votre raisonnement, proposer des probabilités pour $P(X \in [c;d])$, $P(X \in]c;d])$, $P(X \leq c)$, $P(X > c)$.

Travail de l'élève 2 :

A ces heures perdues, Loïc s'amuse à lancer des flèchettes sur des cibles originales, dont la forme est donnée dans chaque cas par le domaine de plan coloré, situé au-dessus du segment représentant l'intervalle $[0;1]$.
Les trois cibles ont la même aire totale.
Loïc ne râte jamais sa cible, mais sa fléchette peut tout de même se planter aléatoirement dessus.
On appelle x l'abscisse du point d'impact P.
Pour un intervalle J inclus dans $[0,1]$, on étudie ci-dessous la probabilité de l'événement $\{x \in \mathrm{J}\}$ pour chaque cible.

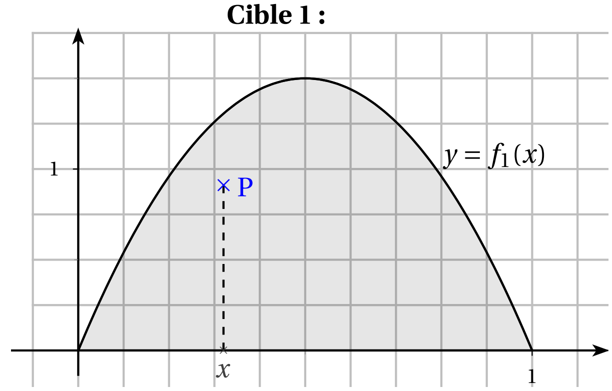
1. Quel lien peut-on faire avec l'activité précédente ?
2. Loïc gagne lorsque x appartient à l'intervalle $[0;0.2]$.
   - **a.** Avec quel cible a-t-il apparemment le plus de chance de gagner ?
   - **b.** Par lecture graphique, conjecturer la valeur exacte de la probabilité p_2 de gagner avec la cible 2.
   - **c.** Proposer un principe de calcul pour les probabilité p_1 et p_3 de gagner avec les cibles 1 et 3.
3. Le bord supérieur du domaine est, pour chaque cible, la courbe représentative d'une fonction f_i dont on donne l'expression :

$$f_1 : x \longmapsto 6x(1-x) \qquad ; \qquad f_2 : x \longmapsto 1$$

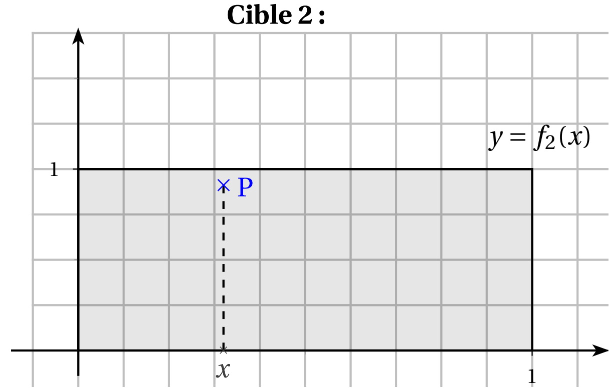
$$\text{et } f_3 : x \longmapsto \frac{3}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{2}$$

   - **a.** Vérifier que chacune des cibles a une aire totale égale à 1 unité d'aire.
   - **b.** Calculer les probabilités p_1 et p_3.
   - **c.** Déterminer par le calcul la probabilité de l'événement $\{0.3 \le x \le 0.7\}$ pour chacune des trois cibles.

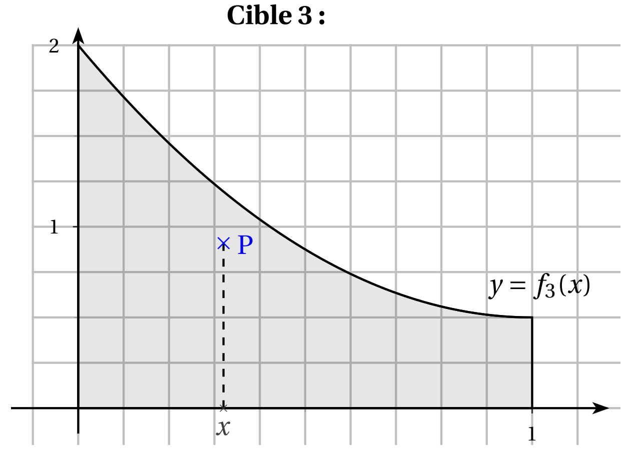
Cible 1 :



Cible 2 :



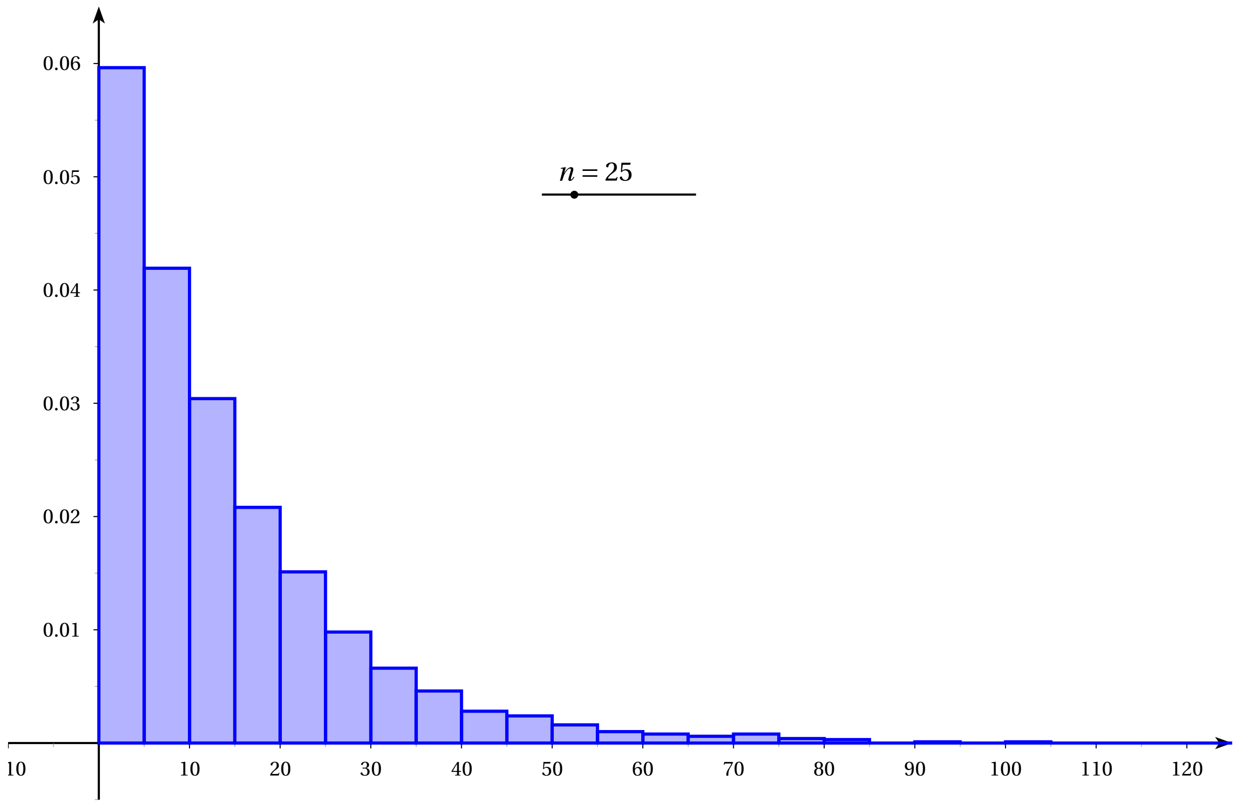
Cible 3 :



Travail de l'élève 3 : On considère un matériel électronique dont le temps de fonctionnement exprimé en semestres, est modélisé par une variable aléatoire T prenant ses valeurs dans $[0; +\infty[$.

1. **Simulation :**

   On a visualisé sur Géogébra 5000 temps de fonctionnement de ce matériel.
   Pour visualiser les données, on les a regroupées en n classes.



   Le diagramme ci-dessus donne l'histogramme associé à un échantillon de taille 5000, de valeur maximale 125, après regroupement en 25 classes d'amplitude 5.

   a. Estimer $P(T \leq 15)$ et $P(5 \leq T \leq 15)$.

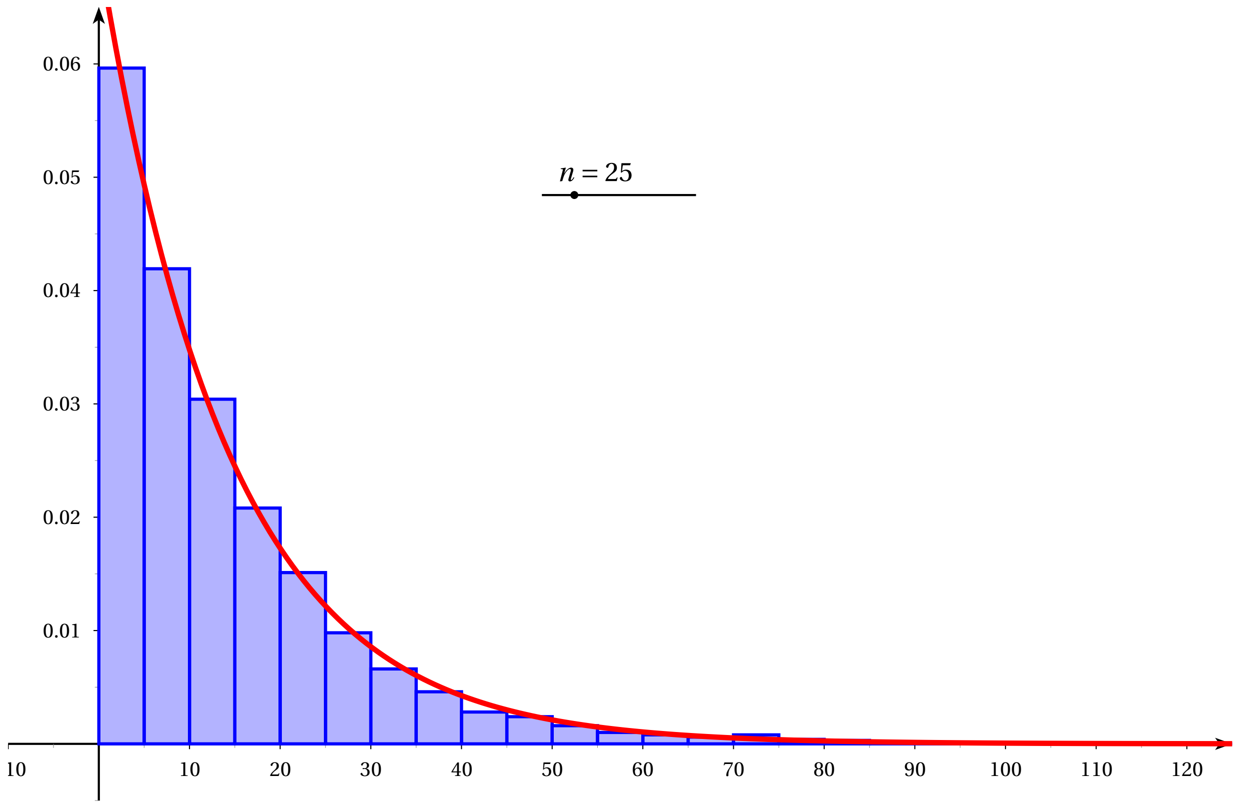
   b. Estimer la valeur t_0 telle que $P(T \leq t_0) = 0.5$.
   On appelle t_0 ***le temps de demi-vie*** *d'un tel appareil*

   c. L'allure du diagramme rappelle un type de fonction continue. Lequel ?

2. Courbe de densité et calculs d'aires

On introduit la courbe de densité $\mathscr{C}$ représentant la fonction f définie pour $x \geq 0$ par $f(x) = 0.07e^{-0.07x}$.

Pour tout réel t positif, on note $\mathrm{F}(t) = \displaystyle\int_0^t f(x)\,dx$.



a. Pour tout t positif, calculer $\mathrm{F}(t)$ et vérifier que f est bien une fonction densité sur $[0;+\infty[$.
Interpréter graphiquement.

b. Calculer $\mathrm{F}(15)$ et comparer avec l'estimation de $\mathrm{P}(\mathrm{T} \leq 15)$ effectuée à la question 1a).
Expliquant en donnant une interprétation graphique de $\mathrm{F}(15)$.

c. A quelle intégrale peut-on comparer $\mathrm{P}(5 \leq \mathrm{T} \leq 15)$? Faire cette comparaison.

d. Calculer $\mathrm{P}(\mathrm{T} \geq 10)$ puis $\mathrm{P}_{(\mathrm{T} \geq 5)}(\mathrm{T} \geq 15)$.
Comparer et commenter les résultats obtenus.

e. Résoudre l'équation $\mathrm{F}(t) = 0.5$ et comparer avec l'estimation de t_0, effectuée à la question 1b).

Travail de l'élève 4 : Loïc est un producteur de foies gras réputé du Sud-Ouest.
En 2011, ses foies gras commercialisés ont eu un poids moyen de 680 grammes, et un écart-type de 120 grammes.
En 2012, ses foies gras commercialisés avaient un poids moyen de 750 g et un écart-type de 100 g.
Jérôme, un client fidèle, a acheté un foie gras de 750g en 2011 et un foie gras de 800g en 2012. Quel classement peut-on faire de ces deux foies, comparativement à la production annuelle dont il sont issus ?

Exemples :

1. Soit f une fonction constante sur un intervalle $[-1;3]$.
   - Quelle doit être sa valeur pour que f soit une densité sur cet intervalle ?
     La loi associée à cette densité s'appelle **la loi uniforme sur** $[-1;3]$. Nous l'avons déjà rencontrée dans l'activité 1.
   - Soit X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $[-1;3]$. Calculer $P(0 \leq X \leq 0.25)$ puis $P(a \leq X \leq b)$ pour tout $a \leq b$ appartenant à I.
   - Calculer l'espérance de X.
2. Un entrepôt accueille tous les matins des camions de livraison sur un créneau de deux heures d'ouverture, de 7h30 à 9h30. On s'intéresse à l'heure d'arrivée T d'un camion qui se présente tous les matins à l'entrepôt aux heures d'ouverture.
   On admet que T suit la loi de probabilité de densité $f : x \longmapsto |x-8.5|$ sur l'intervalle $[7.5;9.5]$.
   - Vérifier que la fonction f est une densité de probabilité sur $[7.5;9.5]$.
   - Calculer la probabilité d'arrivée du camion entre 9h00 et 9h30.
   - En déduire la probabilité que le camion arrive avant 9h00.
   - Calculer la probabilité d'arrivée du camion entre 8h00 et 9h00.
   - Calculer l'espérance de la variable T.
   - Vérifier graphiquement vos résultats sur un dessin.

Exemple :

1. Démontrer que la fonction f définie sur sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = 3\exp^{-3t}$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^+$.
   La loi associée à cette densité s'appelle **la loi exponentielle de paramètre 3**.
2. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre 3 sur $\mathbb{R}^+$.
   Calculer $P(0 \leq X \leq 0.25)$ puis $P(0 \leq X \leq t)$ pour tout t positif.
3. En déduire $P(X \geq t)$.

Preuve

Type ROC :

1. Montrer qu'il existe deux réels c et d (en les déterminant) tels que la fonction

$$G : t \longmapsto (cx+d)e^{-\lambda t}$$

   soit une primitive sur $[0;+\infty[$ de la fonction $g : x \longmapsto t \times \lambda e^{-\lambda t}$.
2. En déduire pour tout x, la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^x t f(t)dt$.
3. Déterminer alors E(T).

Exemple :

On suppose que la durée de vie X d'une voiture suit une loi exponentielle de paramètre 0.1.

1. Calculer la probabilité qu'une voiture dure entre 5 et 8 ans.
2. Calculer la probabilité qu'une voiture dépasse 10 ans de durée de vie.
3. On sait qu'une voiture a duré déjà 10 ans.
   Quelle est la probabilité qu'elle dépasse 12 ans de durée de vie ?
4. Comparer le résultat précédent avec la probabilité que la durée de vie de la voiture dépasse deux ans.

Travail de l'élève 5 :

Objectifs : Les lois de probabilité discrètes donnant lieu à des calculs fastidieux dans certaines situations, on cherche à approcher les résultats par ceux de calculs effectués avec des variables aléatoires continues à densité. Dans le cadre des programmes de Terminale, ce problème est traité pour les lois binomiales. Mais découvrons cela sur un exemple.

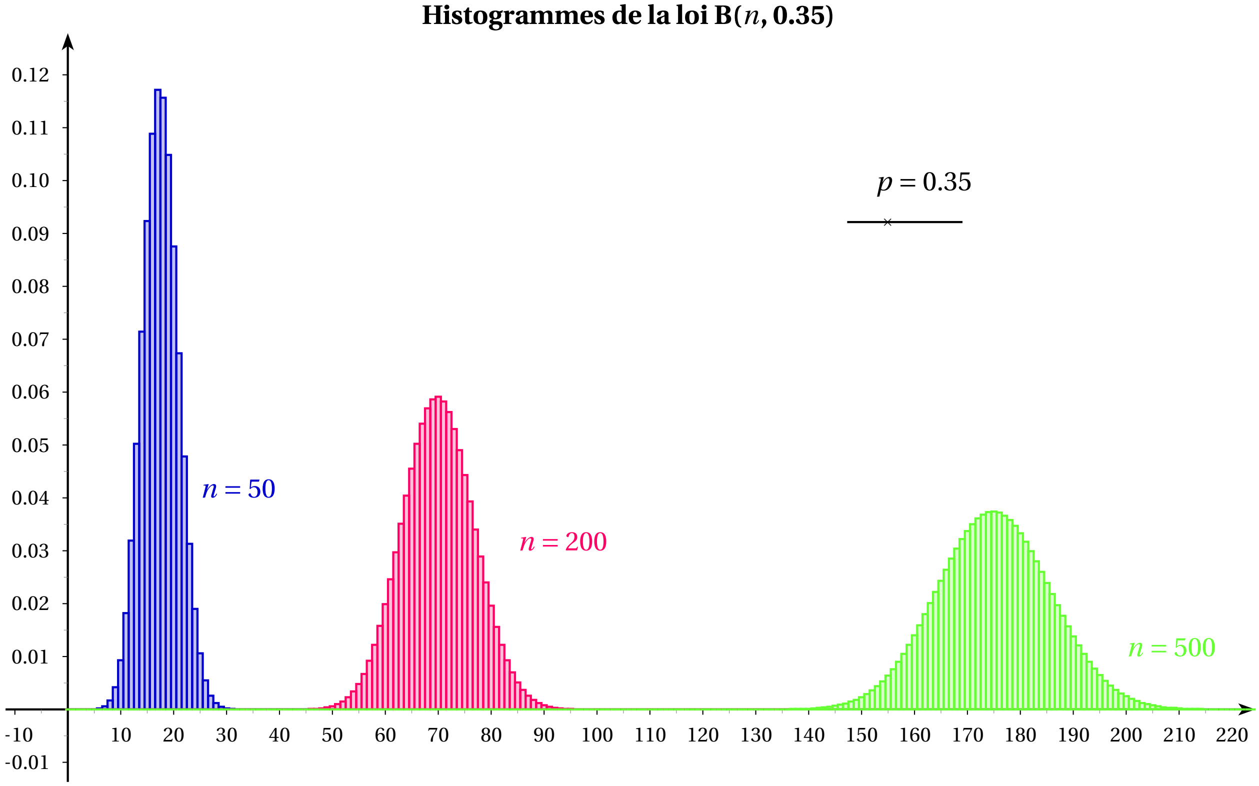
En Syldavie, la proportion de personnes pratiquant la danse sous-marine en scaphandre est $p = 0.35$.
On prélève au hasard un échantillon de taille n dans cette population (celle-ci étant assez grande pour considérer qu'il s'agit de tirages avec remise).

PARTIE A. **Histogramme normalisé de la loi binomiale**

On désigne par X la variable aléatoire associant à un échantillon de taille n le nombre de syldaves de l'échantillon pratiquant la danse sous-marine en scaphandre.

1. **a.** Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
   b. Déterminer en fonction de n, l'espérance μ et l'écart-type σ de X.
   c. On a représenté les histogrammes de la loi $B(n, 0.35)$ pour trois valeurs de n différentes.
   Que se passe-t-il lorsque n varie ?
   Quelle est la somme des aires des rectangles pour un n donné ?

Histogrammes de la loi B(n, 0.35)



On rappelle qu'un ***histogramme*** *est différent d'un* ***diagramme en bâtons****. En effet :*

– *Dans un diagramme en bâtons, on représente les probabilités de chaque valeur possible pour* X *par* ***une hauteur de bâton****.*
– *Dans un histogramme, on représente les probabilités de chaque valeur possible pour* X *par* ***une aire de rectangle*** *: l'aire de chaque rectangle centré autour d'une valeur k vaut* $P(X = k)$.

Pour une loi binomiale classique, bâton ou rectangle, cela ne change rien, puisque chaque rectangle a une largeur de 1*. Donc son aire vaut* $P(X = k)$ *si et seulement si sa hauteur vaut* $P(X = k)$.

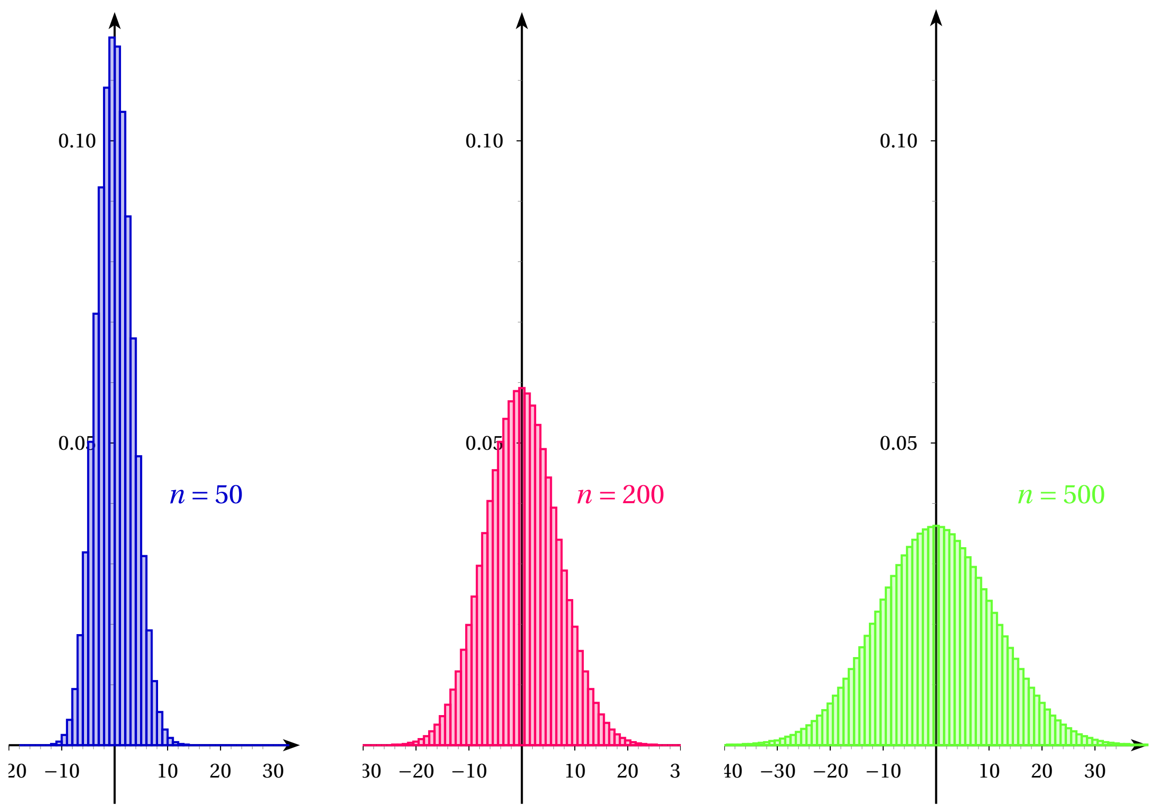
On utilise tout de même les histogrammes, car notre objectif est d'approcher la loi binomiale par une loi continue, dans laquelle les probabilités sont représentées graphiquement par des aires.

2. Pour réduire cette variabilité, stabilisons dans un premier temps la position de l'histogramme en considérant la variable aléatoire $\mathrm{Y} = \mathrm{X} - \mu$.

a. Calculer $\mathrm{E(Y)}$ et $\sigma(\mathrm{Y})$.

b. On a représenté les histogrammes de la loi de Y pour trois valeurs de n différentes.
Expliquer.
Que se passe-t-il lorsque n varie ?
Quelle est la somme des aires des rectangles pour un n donné ?

Histogrammes de la loi de probabilité $\mathrm{Y} = \mathrm{X} - \mu$ **pour** $p = 0.35$



3. Reste donc la variabilité de la dispersion à stabiliser. Considérons pour cela la variable aléatoire $\mathrm{Z} = \dfrac{\mathrm{X} - \mu}{\sigma}$

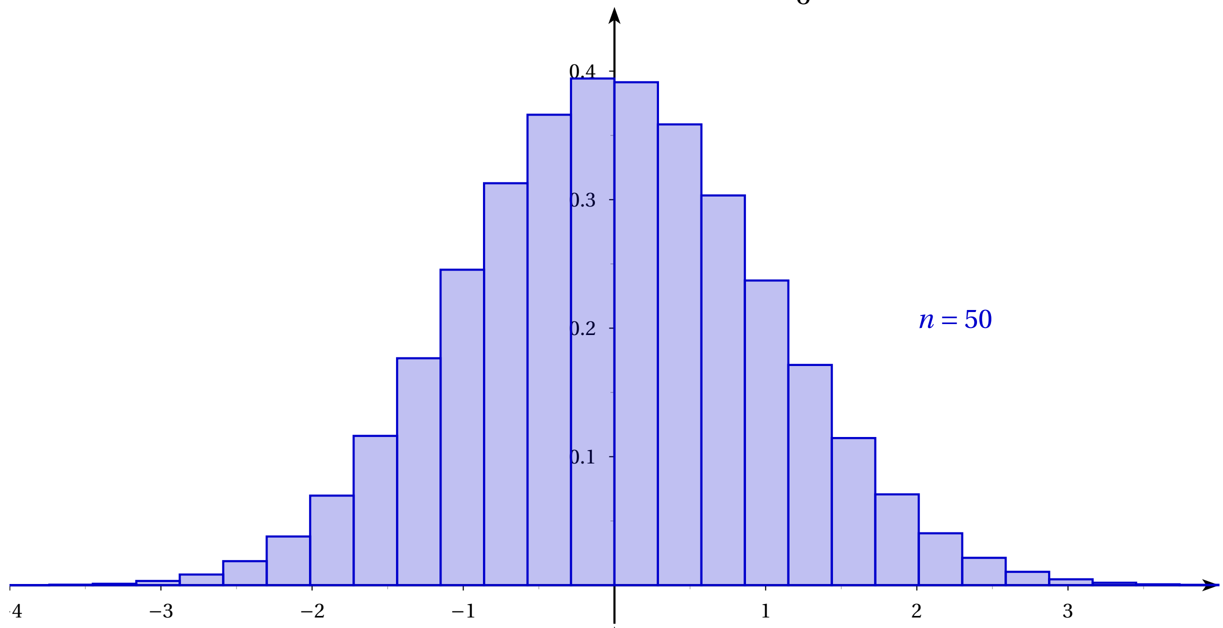
a. Calculer $\mathrm{E(Z)}$ et $\sigma(\mathrm{Z})$.

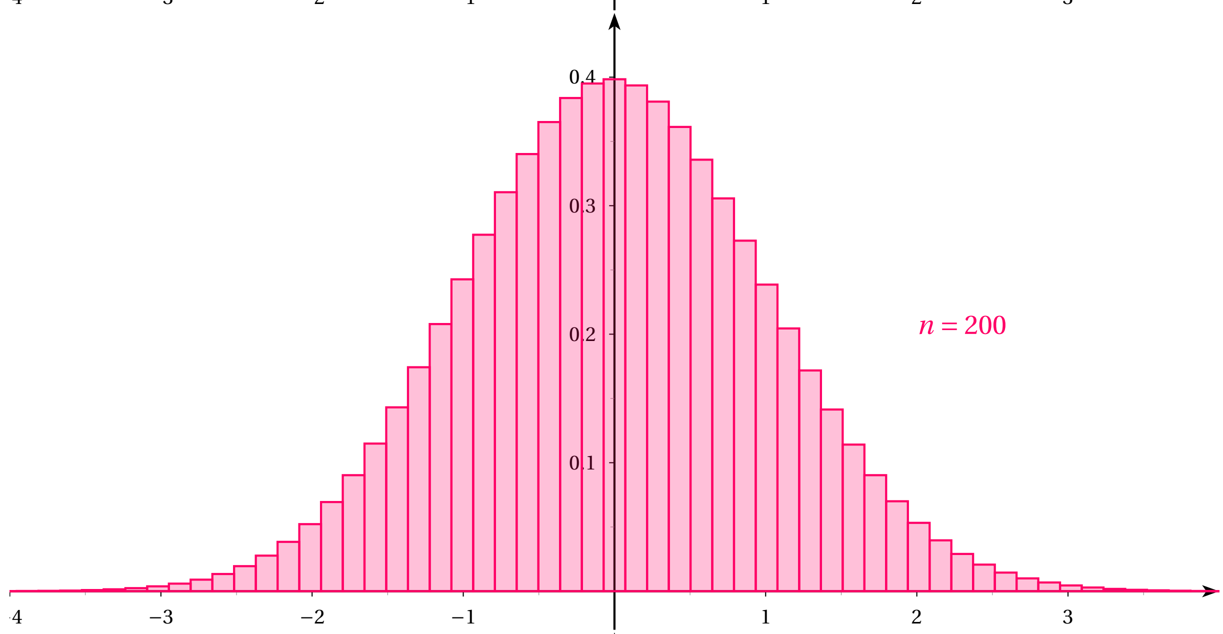
b. Compléter le tableau suivant :

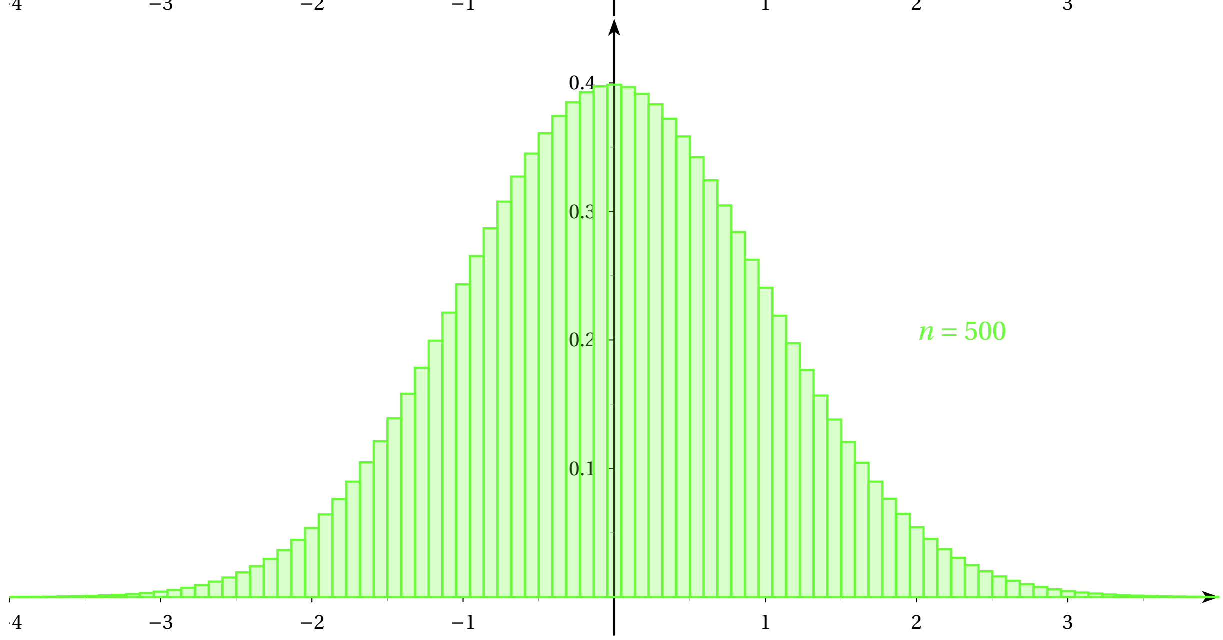
Valeurs k prises par X	0	1	2	...	k	...	n
Valeurs z prises par Z							
$\mathrm{P}(\mathrm{Z} = z)$ en fonction de $\mathrm{P}(\mathrm{X} = k)$							

c. On a représenté les histogrammes de la loi de Z pour trois valeurs de n différentes.
Expliquer.
Que se passe-t-il lorsque n varie ?
Quelle est la somme des aires des rectangles pour un n donné ?

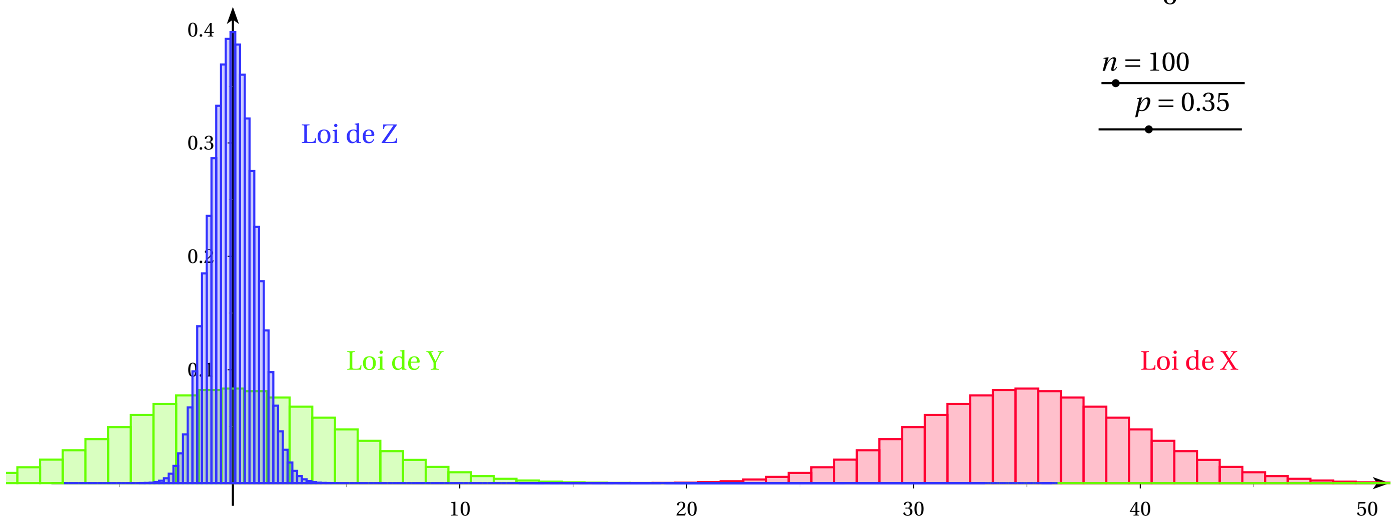
Histogrammes des lois de probabilité de $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$ **pour** $p = 0.35$







Résumé : Histogrammes des lois de probabilité de $X \hookrightarrow B(100, 0.35)$**,** $Y = X - \mu$ **et** $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$

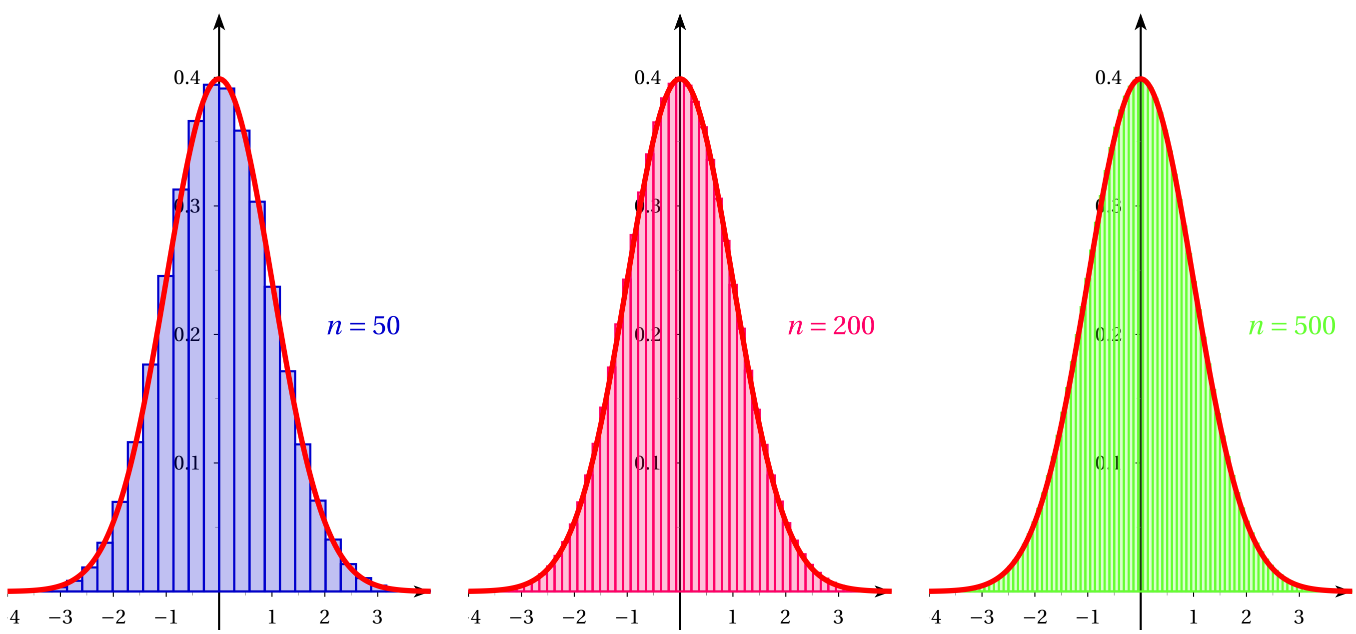


PARTIE B. **Courbe de Gauss et loi normale centrée réduite**

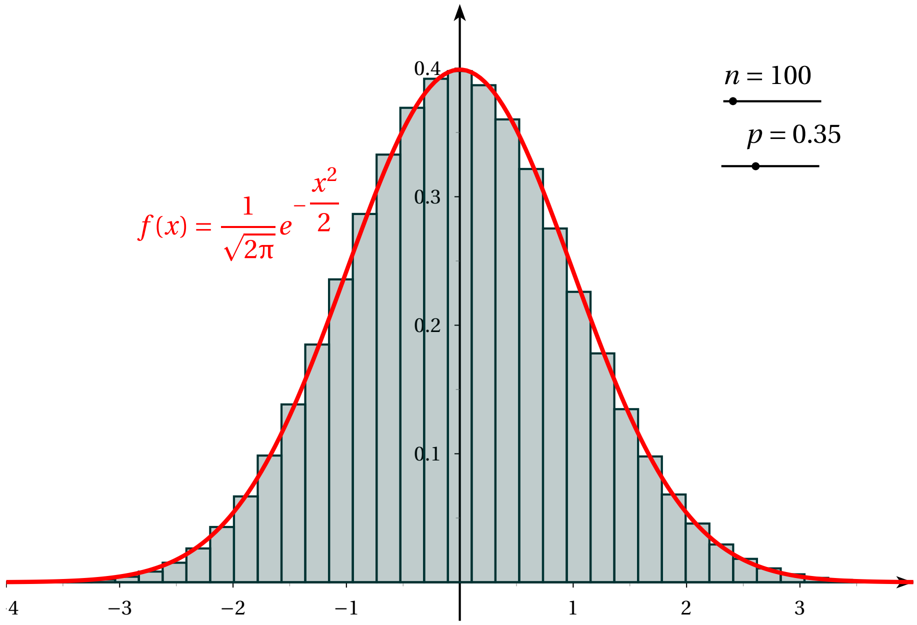
On introduit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

On a représenté cette fonction sur les trois histogrammes de loi de Z.

Courbe de Gauss et Histogrammes des lois de probabilité de $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ **pour** $p = 0.35$



1. Que constate-t-on ?
2. Conjecturer la valeur de $I = \lim\limits_{t\to-\infty} \displaystyle\int_t^0 f(x)\,dx + \lim\limits_{t\to+\infty} = \int_0^t f(x)\,dx$, puis les valeurs de $I_1 = \lim\limits_{t\to-\infty} \displaystyle\int_t^0 f(x)\,dx$ et $I_2 = \lim\limits_{t\to+\infty} = \displaystyle\int_0^t f(x)\,dx$.
3. Que donne Géogébra comme valeur approchée de $J = \displaystyle\int_{-1}^2 f(x)\,dx$?
4. Interpréter graphiquement cette intégrale, puis en termes de probabilités sur X.



Exemple :

Pondichéry 2013

Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe.

Cette entreprise emploie 220 salariés. On admet que la probabilité pour qu'un salarié soit malade une semaine donnée durant cette période d'épidémie est égale à $p = 0,05$.

On suppose que l'état de santé d'un salarié ne dépend pas de l'état de santé de ses collègues.

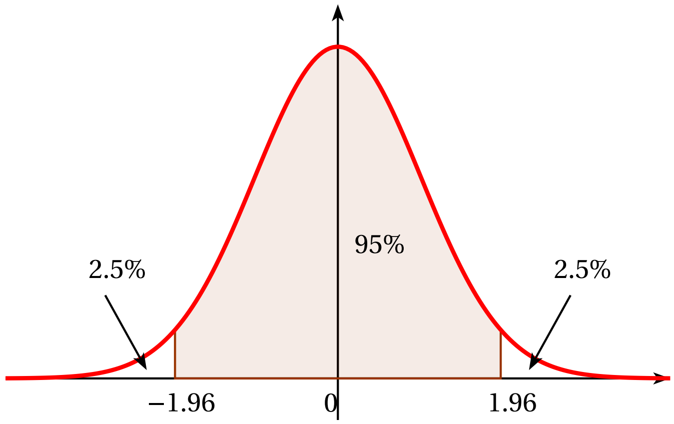
On désigne par X la variable aléatoire qui donne le nombre de salariés malades une semaine donnée.

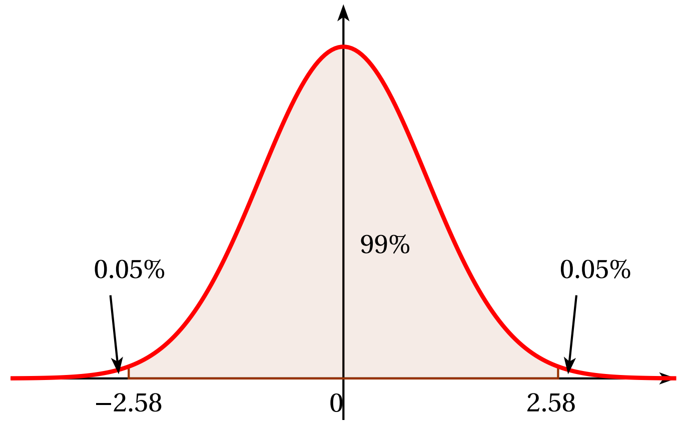
1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
   Calculer l'espérance mathématique μ et l'écart type σ de la variable aléatoire X.

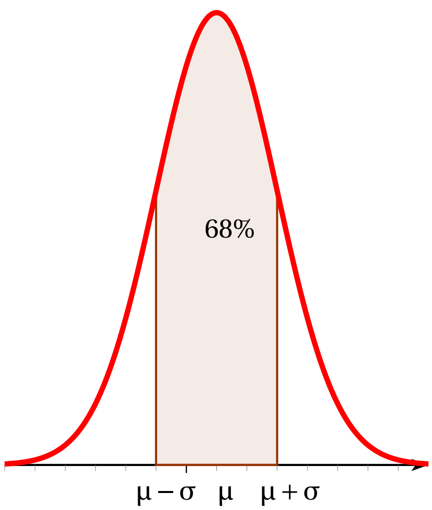
2. On admet que l'on peut approcher la loi de la variable aléatoire $\frac{X-\mu}{\sigma}$ par la loi normale centrée réduite c'est-à-dire de paramètres 0 et 1.
   On note Z une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.
   Le tableau suivant donne les probabilités de l'évènement $Z < x$ pour quelques valeurs du nombre réel x.

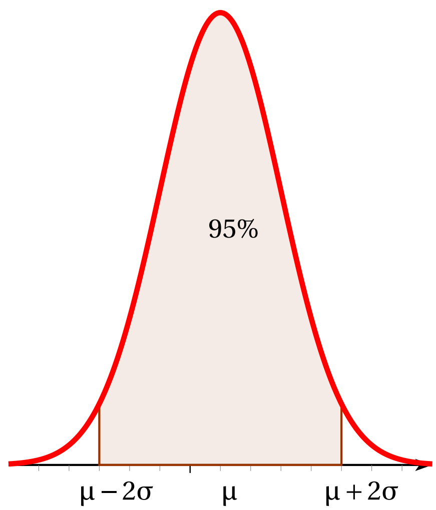
x	$-1,55$	$-1,24$	$-0,93$	$-0,62$	$-0,31$	0,00	0,31	0,62	0,93	1,24	1,55
$P(Z < x)$	0,061	0,108	0,177	0,268	0,379	0,500	0,621	0,732	0,823	0,892	0,939

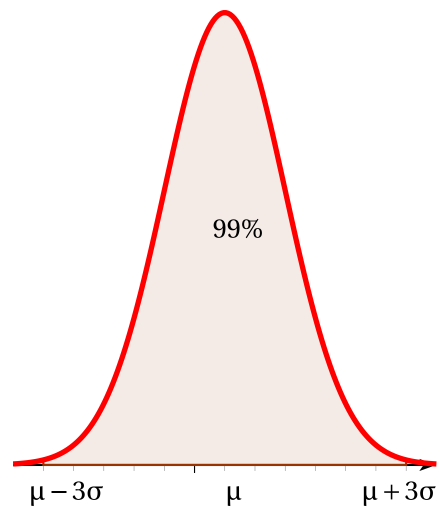
Calculer, au moyen de l'approximation proposée en question b., une valeur approchée à 10^{-2} près de la probabilité de l'évènement : « le nombre de salariés absents dans l'entreprise au cours d'une semaine donnée est supérieur ou égal à 7 et inférieur ou égal à 15 ».



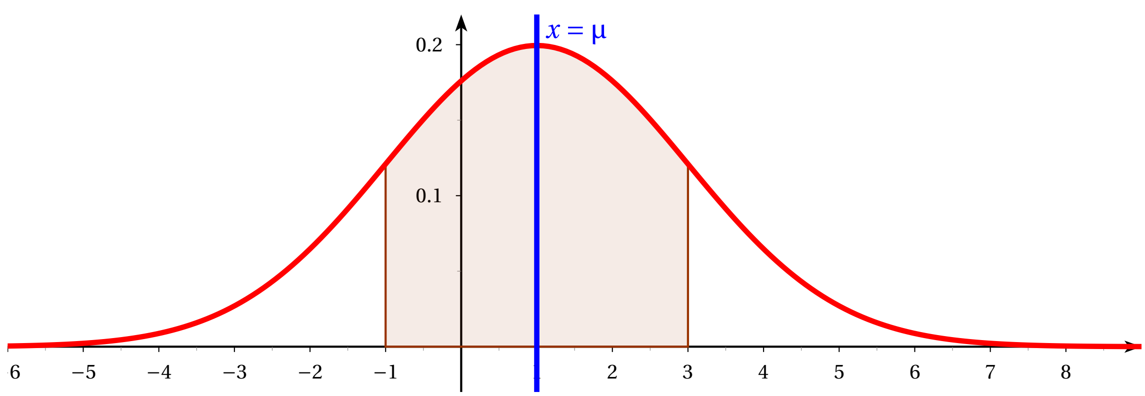


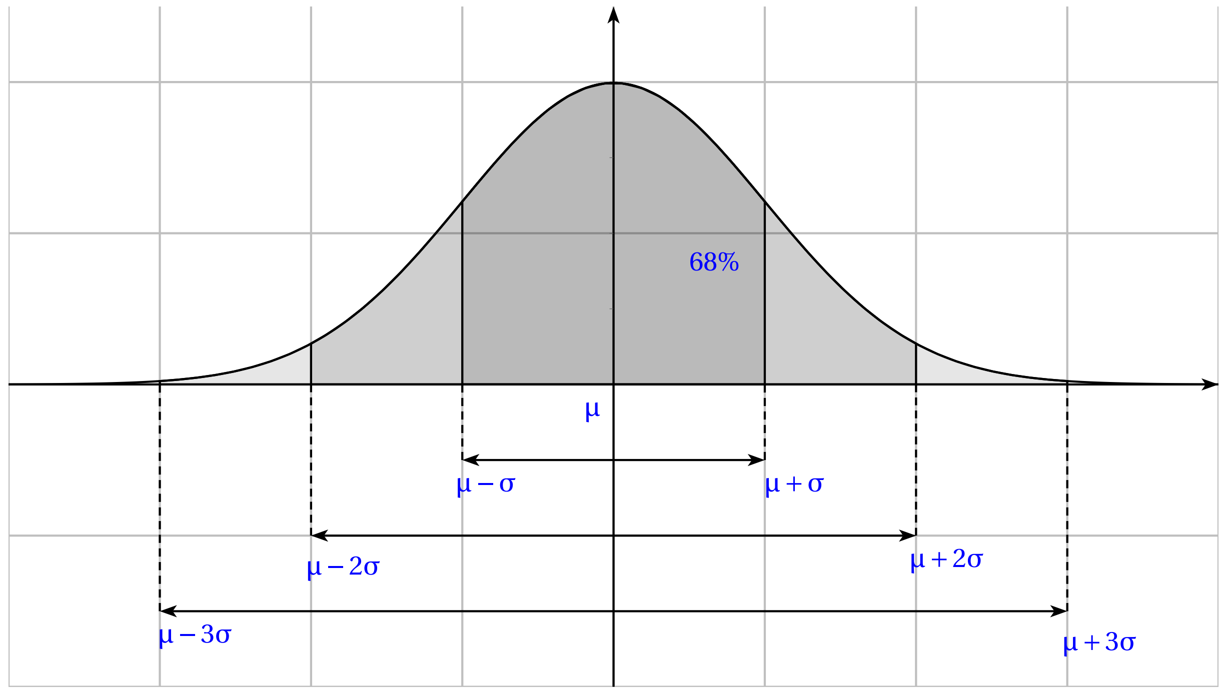




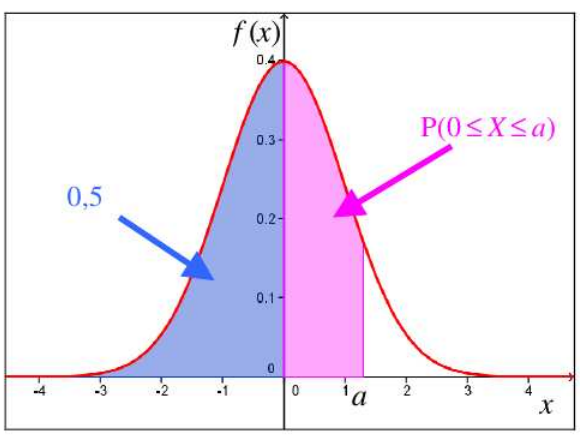


Loi normale $\mathscr{N}(1,4)$ **:** $\mu = 1$ **et** $\sigma = 2$

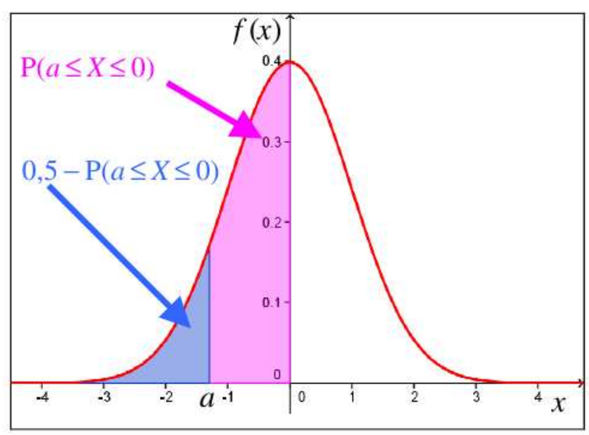




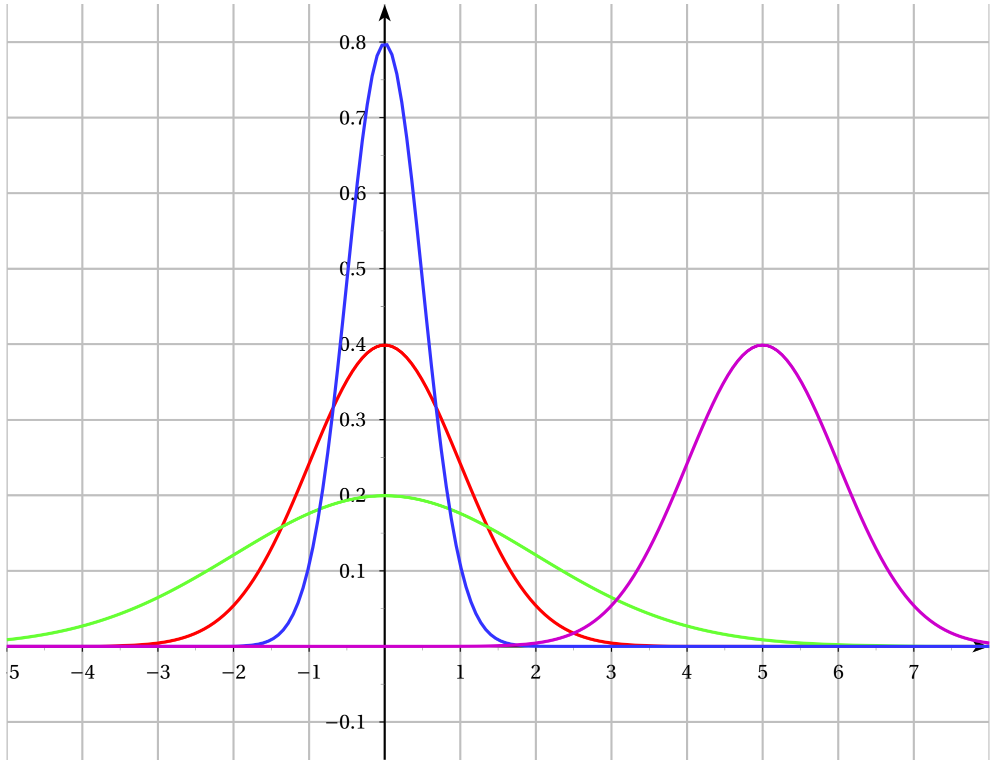
Si $a \leq 0$ on utilise $\mathrm{P}(\mathrm{X} \leq a) = 0.5 + \mathrm{P}(0 \leq \mathrm{X} \leq a)$



Si $a \geq 0$ on utilise $\mathrm{P}(\mathrm{X} \leq a) = 0.5 - \mathrm{P}(a \leq \mathrm{X} \leq 0)$



Reconnaître les lois $\mathcal{N}(0,1)$, $\mathcal{N}(0,1/4)$, $\mathcal{N}(0,2)$ et $\mathcal{N}(5,1)$ parmi les quatre courbes représentées ci-dessous.



Exemple :

La masse en kg des nouveaux nés à la naissance est une variable aléatoire qui peut-être modélisée par une loi normale [a] de moyenne $\mu = 3.3$ et d'écart-type $\sigma = 0.5$.

1. Déterminer $P(X < 2.5)$ en vous ramenant à une loi normale centrée réduite.
Retrouver $P(X < 2.5)$ en utlisant la symétrie de la courbe représentative de la densité de la loi $\mathcal{N}(3.3, 0.5)$.

---

a. Le poids d'un nouveau né ne prend pas de valeurs négatives ni trop grandes, mais on peut vérifier que $P(X < 0)$ et $P(X > 5)$ sont négligeable.

Exemple :

Une compagnie est spéciaisée dans l'empaquetage de jus. L'équipement permettant cet ouvrage verse une quantité X de jus dans chacune des bouteilles de format 1000 ml. Cette quantité peut varier un peu d'une bouteille à l'autre.
On considère alors que X suit une loi normale de paramètre μ et $\sigma^2 = 25\ \mathrm{ml}^2$ et on appelle Z la variable aléatoire $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$.

1. Dans un premier temps, on considère $\mu = 1000$.
   - **a.** Déterminer la probabilité qu'une bouteille contiennent moins de 1000 ml.
   - **b.** Déterminer l'intervalle dans lequel se situe 99% de la production.
2. Reprendre les deux questions précédentes avec $\mu = 1005$ ml.
3. La législation impose qu'il y ait moins de 1% des bouteilles contiennent moins de 1000 ml.
   - **a.** Déterminer μ pour que l'embouteilleur respecte la législation et interpréter.
   - **b.** La contenance des bouteilles étant de 1020 ml, quelle est la probabilité qu'une bouteille déborde lors du remplissage ?
   - **c.** Un inspecteur choisit un échantillon de 20 bouteilles, au hasard et avec remise, parmi la production de la journée.
     L'embouteilleur recevra une amende si l'inspecteur trouve au moins une bouteille contenant moins de 1000 ml.
     On appelle Y la variable aléatoire qui compte le nombre de bouteilles dans l'échantillon qui contiennent moins de 1000 ml. Quelle est la probabilité que l'embouteilleur reçoive une amende ?