Devoir commun 1S1 et 1S3

Remarques :

- La note tiendra particulièrement compte de la qualité et de la clarté des justifications ainsi que du soin apporté à la copie.
- Tous les élèves traiteront les exercices 1, 2 et 3.
- Les élèves de 1S3 et eux seulement traiteront l'exercice 4.
- Les élèves de 1S1 et eux seulement traiteront l'exercice 5.

Exercice 1. (6 points)

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

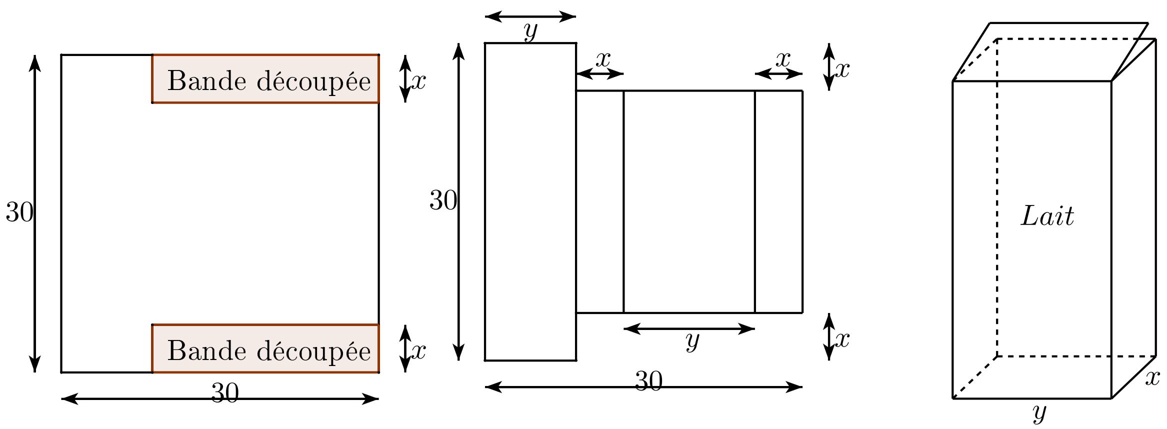
$$f(x) = 2x^3 - 60x^2 + 450x$$

   (a) Calculer $f'(x)$ pour $x \in [0;20]$ puis dresser le tableau de variations de f sur $[0;20]$.

   (b) Déterminer une équation de la tangente Δ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

   (c) Déterminer, par le calcul, les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses.

2. Un fabricant envisage la production de briques de lait en carton obtenues en découpant deux bandes de même largeur dans une feuille carrée comme résumé dans le dessin ci-dessous :



Le côté de la feuille carrée mesure 30 cm et on désigne par x la mesure (en centimètres) de la largeur des bandes découpées.
On suppose que $0 < x < 15$.

   (a) Exprimé y en fonction de x, puis donner, en fonction de x la hauteur de la boîte de lait.

   (b) Démontrer que le volume (en cm^3) de la boîte est

$$V(x) = 2x^3 - 60x^2 + 450x$$

   (c) Pour quelle valeur de x le volume est-il maximal ? Préciser la valeur de ce volume maximal en litres.

Exercice 2. (9 points)

La question 3 est indépendante des deux premières questions.

1. On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \qquad \text{et, pour tout nombre entier naturel } n, \quad u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4$$

On pose, pour tout nombre entier naturel n, $v_n = u_n - 6$.

(a) Calculer v_0 ; v_1 et v_2. Conjecturer la nature de la suite (v_n).

(b) Démontrer que :

$$v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$$

(c) Exprimer v_n en fonction de n.

(d) En déduire que pour tout nombre entier naturel naturel n :

$$u_n = -5\left(\frac{1}{3}\right)^n + 6$$

(e) Déterminer la limite de la suite (u_n).

2. On considère l'algorithme suivant :

Algorithme 1 :

Données: S est un nombre réel ; n et i sont des nombres entiers naturels.
Saisir n
$S := -5$
Pour i allant de 1 à n **Faire**
  $S := S - 5\left(\frac{1}{3}\right)^i$
Fin Pour
Afficher S.

(a) Calculer la somme S (on donnera soit une valeur approchée à sa convenance soit on se contentera de la valeur exacte) :

$$S = v_0 + v_1 + \cdots + v_{10}$$

(b) Quel calcul permet de réaliser cet algorithme ?

(c) Modifier l'algorithme précédent pour qu'il affiche la somme S' définit par :

$$S' = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

3. On considère la suite (w_n) dont les termes vérifient, pour tout nombre entier $n \geq 1$:

$$nw_n = (n+1)w_{n-1} + 1 \qquad \text{et} \qquad w_0 = 1$$

Le tableau suivant donne les dix premiers termes de cette suite :

w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19

(a) Détailler le calcul permettant d'obtenir w_6.

(b) Donner, sans justification, la nature de la suite (w_n). En déduire w_{2009}.

Exercice 3. (9 points)

Un fabricant d'écrans plasma teste une première fois ses appareils à la sortie de la chaîne de fabrication. Si le test est positif (c'est-à-dire si l'écran fonctionne correctement), l'écran est acheminé chez le client. Sinon l'écran retourne en usine où il est réparé puis testé une seconde fois. Si ce deuxième test est positif, l'écran est acheminé chez le client, sinon il est détruit.

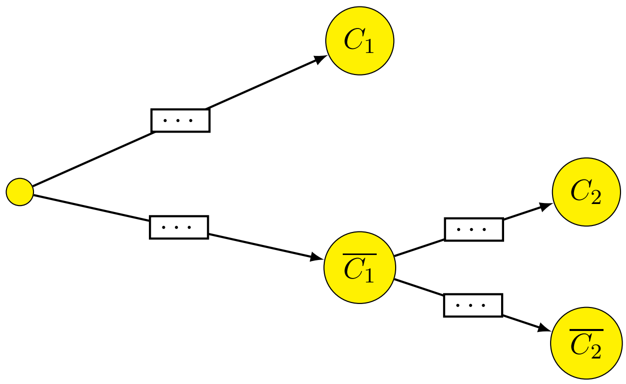
Une étude statistique a permis de montrer que le test est positif pour 70% des écrans neufs sortis directement des chaînes de fabrication, mais que parmi les écrans réparés, seulement 65% d'entre eux passent le second test avec succès.

On note C_1 l'événement : « l'écran est acheminé chez le client à la suite du premier test ».

On note C_2 l'événement : « l'écran est acheminé chez le client à la suite du second test ».

1. On choisit un écran au hasard à la sortie de la chaîne de fabrication.

   (a) Reproduire et compléter l'arbre de probabilité ci-dessous :



   (b) Déterminer les probabilités des événements C_1 et C_2.

   (c) Démontrer que la probabilité que l'écran plasma soit détruit vaut $0,105$.

2. La fabrication d'un écran revient à 1000 € au fabricant si l'écran n'est testé qu'une fois.
   Cela lui coûte 50 € de plus si l'écran doit être testé une seconde fois.
   L'écran n'est facturé que si celui-ci est acheminé chez le client.
   Un écran est facturé a euros (a étant un nombre réel positif) au client.
   On introduit la variable aléatoire X qui, à chaque écran fabriqué, associe le « gain » (éventuellement négatif) réalisé par le fabricant.

   (a) Déterminer la loi de probabilité de X en fonction de a. On recopiera et on complétera :

valeurs x_i prises par X :	$a-1000$	$a-1050$	-1050	Total
$p(X=x_i)$:				

   (b) Montrer que

$$E(X) = 0,895a - 1015$$

   (c) A partir de quelle valeur de a, l'entreprise peut-elle espérer réaliser des bénéfices ?

3. Le fabricant produit 7 écrans plasma par jour.
   On note Y la variable aléatoire qui compte le nombre d'écrans plasma qui finiront à la déchetterie à la fin d'une journée.
   On rappelle que la probabilité qu'un écran plasma finisse à la déchetterie vaut $0,105$.
   Les résultats dans cette question seront arrondis à 10^{-3}.

   (a) Quelle loi suit la variable aléatoire Y ; préciser ses paramètres.

   (b) Calculer $p(Y=3)$.

   (c) Calculer la probabilité qu'au moins un écran plasma soit sauvé de la déchetterie.

   (d) Calculer $E(Y)$ puis interpréter.

Seuls les élèves de $1S3$ traiteront l'exercice suivant :

Exercice 4. (6 points)

On considère un repère orthonormé dans lequel :

$$A(0;0) \qquad B(1,0) \qquad C(1;1) \qquad D(0;1) \qquad E\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

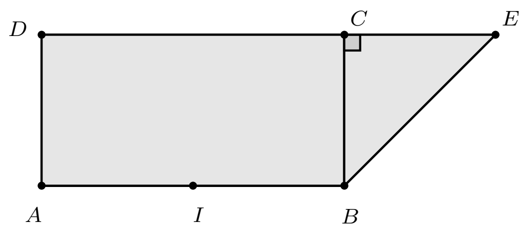
1. Réaliser une figure que l'on complètera tout au long de l'exercice.
2. (a) Rappeler les valeurs de $\cos\frac{\pi}{3}$ et $\sin\frac{\pi}{3}$. Que constate-t-on ?
   (b) Calculer les longueurs AE et AB. En déduire que les points B et E appartiennent à un même cercle $\mathscr{C}$ dont on donnera le centre et le rayon.
   (c) Donner, en justifiant, la nature du triangle AEB.
3. On donne les points $F\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$ et $G\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2};\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$
   (a) Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{DE}$.
   (b) Calculer $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{BG}$. Que peut-on en déduire ?
   (c) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DF}$.
   (d) En déduire que les points D, E et F sont alignés.

Seuls les élèves de $1S1$ traiteront l'exercice suivant :

Exercice 5. (6 points)

$ABCD$ un rectangle tel que :

- $AD = 2$ cm et $AB = 4$ cm
- BCE est un triangle rectangle isocèle en C.
- I est le milieu de $[AB]$:



1. (a) Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}$.
   (b) En déduire $\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AD}\right)\cdot\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}\right)$.
   Interpréter ce résultat par rapport aux droites (ID) et (BE).
   (c) Calculer $\overrightarrow{ID}\cdot\overrightarrow{IB}$.
   (d) Utiliser les **deux** questions précédentes pour calculer $\overrightarrow{ID}\cdot\overrightarrow{IE}$
   (e) Calculer, en cm, la longueur ID puis en admettant que $IE = 2\sqrt{5}$ cm , donner une valeur approchée de l'angle $\widehat{DIE}$ au degré près.
2. On se place désormais dans le repère $\left(A;\frac{1}{4}\overrightarrow{AB},\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)$.
   (a) Justifier que ce repère est orthonormé.
   (b) Déterminer une équation du cercle $\mathscr{C}$ de centre I et de rayon ID.
   (c) Montrer que le point $F(1;\sqrt{7})$ appartient à ce cercle $\mathscr{C}$.
   (d) Déterminer une équation de la tangente au cercle $\mathscr{C}$ passant par F