DEVOIR SURVEILLÉ 7

Exercice 1. (10 points)

On considère la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par :

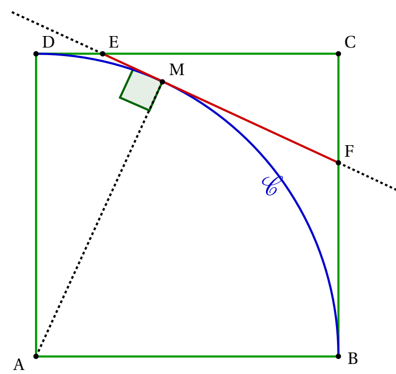
$$P(x) = x^3 - 9x - 12$$

1. Calculer $P'(x)$ pour tout réel x.
2. Etudier le signe de P' et en déduire le tableau de variation complet de P.
3. Donner le maximum et le minimum de P sur l'intervalle $[-2;2]$.
4. Par lecture du tableau de variation de la fonction P, en déduire le nombre de solution de l'équation $P(x) = 0$. En donner une valeur approchée à l'aide de votre calculatrice, à 10^{-1} près.
5. **Application** : Un cube a une arête de x cm. Un parallélépipède rectangle a pour dimensions : 1 cm ; 3 cm et $(3x+4)$ cm. Trouver la valeur de x pour que ces 2 solides aient le même volume

Exercice 2. (10 points)

ABCD est un carré de côté 10. $\mathscr{C}$ est le quart de cercle de centre A et de rayon AB contenu dans le carré ABCD. M est un point quelconque de $\mathscr{C}$. La tangente à $\mathscr{C}$ en M coupe les segments [BC] et [CD] en E et en F.

On se propose de trouver la position du point M **sur** $\mathscr{C}$ **pour que la longueur** EF **soit minimale.**



On pose $BF = x$ et $DE = y$. Le réel x appartient à l'intervalle $[0;10]$.

1. En comparant successivement dans les triangles AMF et ABF justifier que $MF = x$. Procéder de même pour justifier que $ME = y$. En déduire que
$$EF = x + y$$
2. En considérant le triangle CEF, démontrer que :
$$EF^2 = x^2 + y^2 - 20x - 20y + 200$$
puis, en utilisant le fait que $EF = x + y$, que
$$y(2x+20) = -20x + 200$$
3. En déduire que $y = \dfrac{100-10x}{x+10}$
4. En déduire enfin que que $EF = x + y = \dfrac{x^2+100}{x+10}$.
5. On considère la fonction f définie sur $[0;10]$ par :
$$f(x) = \frac{x^2+100}{x+10}$$
   (a) Etudier les variations de la fonction f.
   (b) En déduire que la valeur minimum de EF est $20\sqrt{2} - 20$ et que dans ce cas, $BE = DF$.