DEVOIR MAISON 6 : SUITE

Exercice 1. **La suite de Syracuse**

On étudie l'algorithme suivant :

Algorithme 1 :

Données:
u est un nombre réel.
p est un nombre entier.

$p := 1$
Entrer u
Tant que $(u \neq 1)$ **Faire**
  Si (u est pair) **Alors**
    $u := \frac{u}{2}$
  Sinon
    $u := 3u+1$
  Fin Si
  $p := p+1$
Fin Tant que
Afficher p

PARTIE A. **Comprendre un algorithme**

1. On applique cet algorithme pas à pas avec la valeur $u = 12$ lue en entrée. Reproduire et compléter le tableau suivant :

u	12	6	3	10	5	16	8	4	2	…
p	1	2	3	4	5	6	…	…	…	…

2. Qu'affiche alors l'algorithme pour $u = 12$?
3. Appliquer également l'algorithme avec $u = 14$ puis $u = 100$.

PARTIE B. **Vers la conjecture de Syracuse**

La suite de Syracuse d'un nombre entier N est définie par récurrence, de la manière suivante :

$$\begin{cases} u_0 = \mathrm{N} \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} \quad \text{lorsque } u_n \quad \text{est pair.} \\ u_{n+1} = 3u_n + 1 \quad \text{lorsque } u_n \quad \text{est impair.} \end{cases}$$

1. Quelle est la suite de syracuse de l'entier N = 12 ? de l'entier N = 14 puis N = 100 ?
2. Selon vous, atteint-on toujours le nombre 1, quelque soit le nombre entier strictement positif N choisit ?
   Il s'agit de la conjecture de Syracuse
3. Si vous avez fait de l'erreur de répondre non à la question précédente, trouver un entier N tel que nous n'atteignons jamais 1.

Remarque historique :
- En dépit de la simplicité de son énoncé, cette conjecture défie depuis de nombreuses années les mathématiciens. Paul Erdős a dit à propos de la conjecture de Syracuse : « les mathématiques ne sont pas encore prêtes pour de tels problèmes ».
- Cette conjecture mobilisa tant les mathématiciens durant les années 1960, en pleine guerre froide, qu'une plaisanterie courut selon laquelle ce problème faisait partie d'un complot soviétique visant à ralentir la recherche américaine.

PARTIE C. **Temps de vol - vol en altitude**

On donne les deux définitions suivantes :

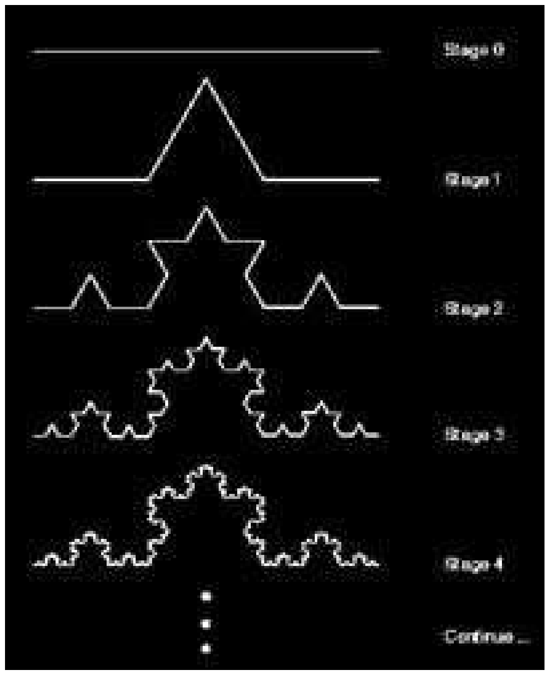
– **Temps de vol** : Il s'agit du plus petit entier n tel que $u_n = 1$.
– **Temps de vol en altitude** : Il s'agit du plus petit entier n tel que $u_n < u_0$.

1. Déterminer le temps de vol de l'entier N = 17, puis de N = 12, N = 14 et enfin de N = 100.
2. Déterminer le temps de vol en altitude des entiers N = 17, N = 12, N = 14 et enfin N = 100.

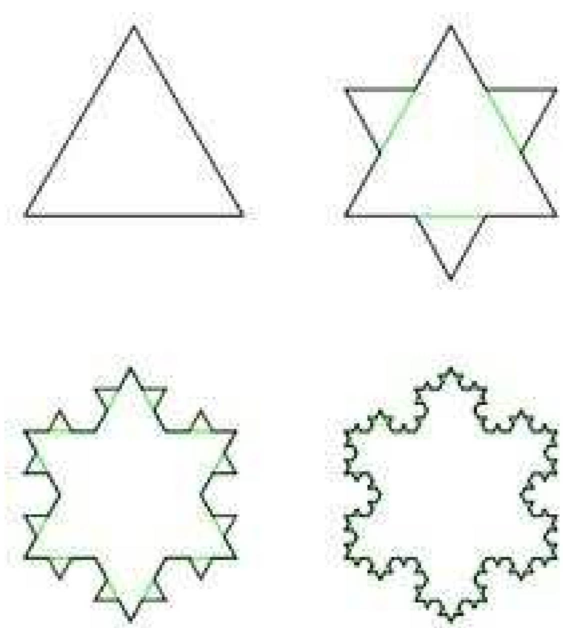
<u>Exercice</u> 2. **Le flocon de Koch**

Le flocon de Koch est une figure géométrique obtenue à partir d'un triangle équilatéral pa réitération d'une transformation appliquée à chaque côté du triangle.

Description de la transformation : Pour chacun des côtés du triangle on effectue la transformation suivante :



Ce qui donne :



PARTIE A. **Etude du nombre de côtés**

Pour tout entier naturel n, $n \geq 0$, on note C_n le nombre de segments qui constituent le flocon à l'étape n (ainsi $C_0 = 3$, $C_1 = 12$).

1. Donner C_2, C_3 et C_4.
2. Exprimer C_{n+1} en fonction de C_n.
3. Vérifier, sur les premiers termes, que $C_n = 3 \times 4^n$.

PARTIE B. **Etude du périmètre**

Pour tout entier naturel n, $n \geq 0$, on note u_n la longueur du segment à l'étape n (ainsi $u_0 = 1$, $u_1 = \frac{1}{3}$).

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
2. Vérifier, sur les premiers termes, que $u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$
3. Déterminer le périmètre, noté p_n, du flocon à l'étape n.
4. Donner la limite de la suite p.

PARTIE C. **Etude de l'aire**

Pour tout entier naturel n, $n \geq 0$, on note a_n l'aire du flocon à l'étape n.

1. Calculer a_0.
2. De l'étape n à l'étape $n+1$, l'aire est augmentée de celle des C_n triangles équilatéraux de côté u_{n+1}.
   En déduire $a_{n+1} - a_n$ en fonction de n.
3. Montrer alors que, pour $n \geq 1$ on a :
$$a_{n+1} = a_n + \frac{\sqrt{3}}{12} \times \left(\frac{4}{9}\right)^n$$
4. Donner de a_2, a_3, a_4 et a_5 arrondie au millième.
5. **On ne demande aucune justification** : Selon vous, la suite a est-elle convergente ou divergente ?