DEVOIR MAISON 3 : LE PARADOXE DE PARRONDO

Histoire
Le physicien Juan M.R. Parrondo est l'inventeur du paradoxe du même nom. On trouvera un exposé en anglais sur sa page personnelle. Il s'agit d'un jeu relativement complexe que l'on présente comme une succession de lancers de pièces de monnaies non équilibrées. Il est la combinaison du jeu A, simple lancer d'une pièce n° 1, et du jeu B où on lance soit la pièce n° 2 soit la n° 3 comme décrit dans l'exercice ci-dessous

Exercice 1.
Dans tout l'exercice ϵ désigne un nombre réel tel que $0 < \epsilon < \dfrac{1}{10}$.

- *Jeu A* : Le joueur lance une pièce de monnaie où Face est gagnante avec la probabilité $p_1 = \dfrac{1}{2} - \epsilon$, le gain est alors d'un euro. Pile est perdante avec la probabilité $1 - p_1 = \dfrac{1}{2} + \epsilon$ (gain de -1 euro).
- *Jeu B* : B est un peu plus compliqué, si le capital est multiple de 3, alors Face gagne avec la probabilité $p_3 = \dfrac{3}{4} - \epsilon$, sinon Face gagne avec la probabilité $p_2 = \dfrac{1}{10} - \epsilon$

PARTIE A. **Le jeu A**

Un joueur joue deux fois de suite au jeu A. Soit X_a la variable aléatoire donnant le gain d'un joueur lorsqu'il joue au jeu A.

1. Décrire par un arbre pondéré l'univers de cette expérience aléatoire.
2. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X_a.
3. Calculer $E(X_a)$. Le jeu est-il avantageux pour le joueur ?
4. Calculer $\sigma(X_a)$ puis interpréter.

PARTIE B. **Le jeu B**

Un joueur joue une fois au jeu B. Soit X_b la variable aléatoire donnant le gain d'un joueur lorsqu'il joue au jeu B. On admet qu'il a une chance sur trois d'avoir un capital multiple de 3.

1. Décrire par un arbre pondéré l'univers de cette expérience aléatoire.
2. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X_b.
3. Calculer $E(X_b)$. Le jeu est-il avantageux pour le joueur ?
4. Calculer $\sigma(X_b)$ puis interpréter.

PARTIE C. **Etude du jeu B sur plusieurs parties**

Le joueur commence le jeu B avec 10 €. Il joue successivement deux parties au jeu B. On note X_c la variable aléatoire donnant le gain du joueur au terme de deux parties.

1. Décrire par un arbre pondéré l'univers de cette expérience aléatoire.
2. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X_c.
3. Calculer $E(X_c)$. Le jeu est-il avantageux pour le joueur ?

PARTIE D. **Une alternance entre les jeux A et B**

Un joueur joue alternativement aux jeux A et B de la manière suivante ; il joue deux fois de suite au jeu A, puis deux fois de suite au jeu B.
Soit X_d la variable aléatoire donnant le gain du joueur lorsqu'il respecte ce protocole.
Dans cette partie $\epsilon = 0,005$. et le joueur commence le jeu avec 10€.

1. Décrire par un arbre pondéré l'univers de cette expérience aléatoire.
2. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X_d.
3. Calculer $E(X_d)$. Le jeu est-il avantageux pour le joueur ? En quoi ce résultat apparait-il comme paradoxal ?