Devoir Maison 2

Exercice 1. *Angles de vecteurs*
ABCD est un polygone tel que :

$$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right) = -\frac{\pi}{3} \qquad \left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right) = \frac{\pi}{4} \qquad \text{et} \qquad \left(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DC}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

1. Dessiner ce polygone tel que AB = 4 cm et AD = 6 cm.
2. Déterminer des mesures de $\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{AB}\right)$ et $\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{CD}\right)$
3. A l'aide de la relation de Chasles, calculer la mesure principale de $\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD}\right)$

Exercice 2. *Equations trigonométriques*

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations trigonométriques suivantes :
   (a) $\sin x = \sin\frac{\pi}{4}$;
   (b) $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\frac{\pi}{6}$;
   (c) $\sin 2x = \frac{1}{2}$;
   (d) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
2. (a) Montrer que $\cos\frac{\pi}{5} = \sin\frac{3\pi}{10}$.
   (b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation trigonométrique :

$$\cos x = \sin\frac{3\pi}{10}$$

Exercice 3.
Un élève propose deux « nouvelles »formules à ajouter aux formules trigonométriques classiques :

$$\cos 2a = 2\cos a \qquad (1)$$
$$\sin 2a = 2\sin a \qquad (2)$$

Ces deux formules sont-elles :
1. vraies pour tout nombre réel a ?
2. vraies pour quelques valeurs de a ? Si oui, lesquelles ?
3. fausses pour toute valeur de a ?

Exercice 4. On se propose de résoudre l'équation (E) :

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2} \qquad \text{pour } x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

1. (E) admet une « solution évidente ». Laquelle ?
2. (a) Soit P le polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$P(x) = 2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1$$

   Déterminer la forme canonique de P.
   (b) A l'aide de la question précédente déterminer l'antécédent de 0 par P.
   (c) En posant $X = \cos x$ et $Y = \sin x$ et ajoutant une équation supplémentaire toujours vérifiée par X et Y, former un système de deux équations à deux inconnues que l'on résoudra (en utilisant le résultat de la question précédente).

Exercice 5. *Sur les pas de Claude Ptolémée*
A l'aide du théorème de Ptolémée :

Théorème 1.

Si le quadrilatère convexe ABCD est inscrit dans un cercle, alors :

$$AB \times CD + BC \times AD = AC \times BD$$

démontrons que : « si $0 < b < a < \frac{\pi}{2}$, alors $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$ ».
Sur le demi-cercle de diamètre AD = 1 et de centre O, on place les points B et C tels que :

$$\left(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DC}\right) = a \qquad \text{et} \qquad \left(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DB}\right) = b$$

1. Déterminer en fonction de $\sin a$, $\sin b$, $\cos a$ et $\cos b$ les longueurs AB, BD, AC et DC.
2. Montrer que
$$\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}\right) = 2a - 2b$$
En déduire que $BC = \sin(a-b)$.
3. Conclure à l'aide du théorème de Ptolémée.

Exercice 6. *Problème ouvert : un escargot se déplace.*
Un escargot se déplace dans un potager rectangulaire de dimensions 3 m ×4 m.
Un repère orthonormé $(O;I,J)$ est tracé sur le sol tel que :
- O est le centre du potager ;
- $\overrightarrow{OI}$ a pour direction la longueur du potager ;
- le plan est orienté.

L'escargot par de O et avance à la vitesse de 6 cm.min^{-1} en suivant l'axe des abscisses dans le sens positif pendant 1 minute, puis tourne d'un angle de $\frac{\pi}{45}$. Il poursuit son chemin pendant 1 minute, tourne encore et ainsi de suite.
Arrivera-t-il sur une des clôtures en moins de 2 heures ?