

EXERCICES : VECTEURS

 **Exercice 1** : Déterminer le(s) valeur(s) de k telle(s) que les vecteurs \vec{u} et \vec{v} soient colinéaires :

1. $\vec{u} \begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v} \begin{pmatrix} 5 \\ k+1 \end{pmatrix}$

2. $\vec{u} \begin{pmatrix} -k+1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{v} \begin{pmatrix} k^2+17 \\ 5k-4 \end{pmatrix}$

 **Exercice 2** :

1. Trouver un réel x tel que les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} \cos^2(x) \\ -3\sin(x)+6 \end{pmatrix} \quad \vec{v} \begin{pmatrix} \sin(x) \\ 3 \end{pmatrix}$ soient colinéaires

2. L'opposé de la valeur trouvée précédemment est-elle aussi une solution ?
3. Etes-vous capable de donner d'autres solutions ? toutes les solutions ?

 **Exercice 3** :

1. Tracer un quadrilatère quelconque ABCD.
Placer les milieux respectifs I, J, K et L des côtés [AB], [BC], [CD] et [AD].
2. Prouver que le quadrilatère IJKL est un parallélogramme.

 **Exercice 4** : ABC est un triangle. Soient D et E les points tels que $\vec{AD} = 2\vec{AB} + \vec{AC}$ et $\vec{BE} = \frac{1}{3}\vec{BC}$.

1. Démontrer que $\vec{AD} = 3\vec{AE}$.
2. En déduire que D appartient à la droite (AE).

 **Exercice 5** : Soient A et B deux points distinct du plan. On définit le point C tel que $4\vec{CA} - 5\vec{CB} = \vec{AB}$.

1. Exprimer le vecteur \vec{AC} en fonction du vecteur \vec{AB} .
2. Que peut-on en déduire sur les points A, B et C ? Faire une figure.

 **Exercice 6** : Dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points A(6;2), B(-2;-3) et C(17;9).

1. Que dire des points A, B et C ?
2. Si le point D a pour coordonnées (120;75) le quadrilatère BADO est-il un trapèze ?

 **Exercice 7** : On donne les points A(2, 1), B(x, 4) et C(x + 2, 3).

Pour quelle(s) valeur(s) de x les points A, B et C sont-ils alignés ?

 **Exercice 8** : On donne les points M(x, 5), A(2, 4), R(3, x - 1) et E(2, 1).

Pour quelle(s) valeur(s) de x les droites (MA) et (RE) sont-elles parallèles ?

 **Exercice 9** : On considère les points A(-2;5), B(-1;3), C(5;-2) et D $\left(-2; -\frac{13}{3}\right)$. E est le point tel que $\vec{AE} = 4\vec{AB}$.

1. Calculer les coordonnées du point E.
2. Démontrer que les points C, D et E sont alignés.

 **Exercice 10** : Dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , on considère les points $A(-1; -3)$, $B(-3, 3)$, $C(4; 2)$ et $D(5; -1)$.

Démontrer que le quadrilatère ABCD est un trapèze rectangle.

Indication : on peut dessiner une figure pour savoir quels côtés sont parallèles et où est l'angle droit.

 **Exercice 11** : Voici un algorithme :

 **Algorithme 1 :**

Variables
 $x_A, y_A, x_B, y_B, x_C, y_C, a, b, c$ et d sont des nombres réels

Début
 Saisir $x_A, y_A, x_B, y_B, x_C, y_C$
 $x_B - x_A \rightarrow a$
 On affecte la valeur $y_B - y_A$ à b
 c prend la valeur $x_C - x_A$
 $d := y_C - y_A$
Si ($ad - bc = 0$) **Alors**
 | Afficher « les points sont alignés »
Sinon
 | Afficher « les points ne sont pas alignés »
Fin Si
Fin

1. Tester à la main cet algorithme avec les points $A(1; -2)$, $B(3; 5)$ et $C(1; -1)$.
2. Que fait-il ?
3. Ecrire cet algorithme sur votre calculatrice graphique.

 **Exercice 12** : ABCD est un rectangle. E est le symétrique de C par rapport à B, F est le symétrique de A par rapport à D, G est le point tel que $\vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{AB}$.

1. Faire une figure.
2. En se plaçant dans le repère $(A; \vec{AB}; \vec{AD})$, démontrer que G, E et F sont alignés.
3. Soit H le point d'intersection de (EF) et (CD). Exprimer \vec{DH} en fonction de \vec{AB} .

 **Exercice 13** : ABCD est un tétraèdre. Dans le plan (ABC) on définit le point K par $\vec{AK} = \frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}$.

1. Faire une figure dans l'espace, puis une figure dans le plan (ABC).
2. En choisissant un repère du plan (ABC), démontrer que K appartient à [BC].

 **Exercice 14** : On considère ABCD un parallélogramme non aplati.

1. Donner la décomposition des vecteurs \vec{CA} , \vec{BD} , \vec{AO} et \vec{BC} dans la base $(\vec{CB}; \vec{CD})$.
2. Exprimer le vecteur \vec{CA} dans chacune des bases suivantes :
 - a. $(\vec{AB}; \vec{AD})$.
 - b. $(\vec{OB}; \vec{OC})$.
 - c. $(2\vec{CB}; -0,5\vec{CD})$
3. Quelles sont les coordonnées du vecteur $\vec{w} = \vec{CA} + 2\vec{BD}$ dans la base $(\vec{CB}; \vec{CD})$.

Exercice 15 : Soit EFG un triangle. Le point I est tel que $\vec{GI} = \frac{1}{3}\vec{GF}$ et H est l'image de E par la translation de vecteur \vec{FE} . Le point O est le milieu de [EG].

1. Faire une figure.
2. Expliquer pourquoi $(F; \vec{FG}; \vec{FE})$ est un repère du plan.
3. En se plaçant dans ce repère, démontrer que les points I, O et H sont alignés.

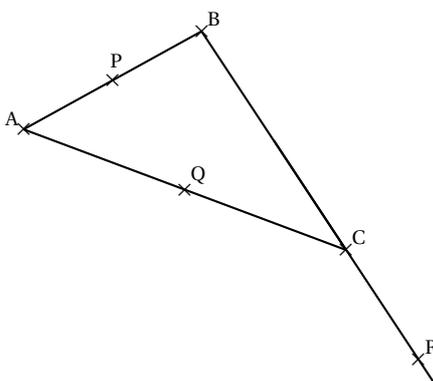
Exercice 16 : ABC est un triangle. I est le milieu de [BC] et M est un point de la parallèle à (AB) passant par I. La parallèle à (AC) passant par I coupe la parallèle à (BC) passant par M en N.

1.
 - a. Réaliser une figure avec un logiciel de géométrie.
 - b. Semble-t-il exister une position du point M pour laquelle :
 - M = N ?
 - BCMN est un parallélogramme ?
 - BCNM est un parallélogramme ?
2. On se place dans le repère $(A; \vec{AB}; \vec{AC})$.
 - a. Justifier que les coordonnées du point M peuvent s'écrire $(k; \frac{1}{2})$ où k désigne un nombre réel.
 - b. Exprimer les coordonnées de N en fonction de k.
 - c. Justifier les conjectures émises à la question 1.b..

Exercice 17 : Soit ABC un triangle et a un réel. On considère les points P, Q et R définis par :

$$\vec{AP} = a\vec{AB} \quad \vec{CQ} = a\vec{CA} \quad \vec{CR} = a\vec{BC}$$

La figure ci-contre correspond au cas où $a = \frac{1}{2}$



Existe-t-il des valeurs de a pour lesquelles les points P, Q et R sont alignés ?

Exercice 18 : Soit un triangle RST et K le milieu de [RS].

1. Construire les points H et L tels que :

$$\vec{TH} = -3\vec{TR} \quad \text{et} \quad \vec{SL} = -2\vec{ST}$$

2. Montrer que $\vec{TR} + \vec{TS} = 2\vec{TK}$.
3. Décomposer le vecteur \vec{HL} dans la base $(\vec{TR}; \vec{TS})$
4. En déduire que (HL) et (TK) sont parallèles.

 **Exercice 19** : Construire un triangle ABC, puis les points D, E et F tels que $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BF} = 2\overrightarrow{BC}$.

Le but de cet exercice est de démontrer par deux méthodes différentes que D, E et F sont alignés.

1.
 - a. Décomposer \overrightarrow{DE} et \overrightarrow{DF} dans la base $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$.
 - b. Démontrer que D, E et F sont alignés.
2. La parallèle à (DE) passant par C coupe [AB] en un point I.
 - a. Démontrer que E est le milieu de [AI].
 - b. En déduire que I est le milieu de [EB].
 - c. Démontrer alors que la droite (CI) est parallèle à la droite (FD). Conclure.

 **Exercice 20** : ABCD est un tétraèdre. I est le milieu de [AB], J celui de [BD] et K celui de [JC]. E est le point du segment [AE] tel que $AE = \frac{2}{3}AJ$ et F est le point du segment [BC] tel que $BF = \frac{2}{3}BC$.

1. Faire une figure.
2. On se place dans le plan (ABD). Faire une figure (dans le plan (ABD)) puis démontrer que I, E et D sont alignés.
3. On se place dans le plan (BCD). Démontrer que F, K et D sont alignés.
4.
 - a. Que peut-on dire des droites (IE) et (FK) ?
 - b. En déduire que I, E, F et K sont coplanaires.

 **Exercice 21** : On considère un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1. On considère les points A(2; -3) et B(4; -5).
Donner trois vecteurs directeurs de la droite (AB).
2. Déterminer trois équations cartésiennes de la droite d passant par le point C(2; -1) et de vecteur directeur $\vec{u}(-1; 2)$.
3. Donner une équation cartésienne de la droite d passant par le point D(5; -1) et parallèle à la droite d_1 dont une équation cartésienne est $2x - 7y = 2$.
4. La droite d est-elle parallèle à la droite d_2 dont l'équation réduite est $y = -\frac{2}{7}x + 3$.
Si non, donner les coordonnées de leur point d'intersection.

 **Exercice 22** : Quel est le coefficient directeur d'une droite de vecteur directeur \vec{u} avec :

1. $\vec{u}(1; -3)$
2. $\vec{u}(-2; 4)$
3. $\vec{u}(5; -2)$
4. $\vec{u}\left(\frac{1}{4}; 2\right)$

 **Exercice 23** : Soit d la droite d'équation $2x - 3y = -7$.

1. Le point A(-2; 1) appartient-il à d ?
2. Même question avec B $\left(\frac{1}{3}; \frac{5}{2}\right)$ et C $\left(3; \frac{13}{3}\right)$.
3. Trouver l'ordonnée du point E de d d'abscisse $-\frac{2}{7}$.
4. Trouver l'abscisse du point F de d d'ordonnée $\frac{1}{5}$.

 **Exercice 24** : Placer les points $A(-2;4)$, $B(2;2)$, $C(-5;0)$ et le point D tel que $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB}$.

1.
 - a. Quelle est la nature du quadrilatère $ABDC$?
 - b. Déterminer les coordonnées de D .
2.
 - a. Soit $d : 6x + y = 14$.
Vérifier que B et D appartiennent à d .
 - b. Trouver une équation cartésienne de la droite (AC) .
 - c. Prouver que (BD) et (AC) sont sécantes.
 - d. Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection E .
3.
 - a. Calculer les coordonnées de K milieu de $[AB]$ et de L milieu de $[CD]$.
 - b. Démontrer que les points E , K et L sont alignés.

 **Exercice 25** : Soit m un réel et d la droite d'équation $x + my + 3 = 0$ Peut-on trouver m tel que :

1. $\vec{u}(3;2)$ soit un vecteur directeur de d .
2. $A(-2;3)$ appartienne à d .
3. d soit parallèle à la droite d'équation $3x - y = 0$.
4. d soit parallèle à l'axe des abscisses.
5. d soit parallèle à l'axe des ordonnées.
6. d passe par l'origine du repère.
7. d passe par le point $J(0;1)$.

 **Exercice 26** : Dans un repère du plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(3;4)$, $B(1;-1)$ et $C(6;-2)$.

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB) .
2. Déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par le milieu I de $[AC]$ et parallèle à (AB) .
3. Δ est la droite d'équation $-16x + y = -98$
 - a. Prouver que Δ et (AB) sont sécantes en D de coordonnées à déterminer.
 - b. Montrer que le milieu J de $[DC]$ est un point de d de deux manières différentes.

 **Exercice 27** : Soit $ABCD$ un trapèze tel que (AB) soit parallèle à (CD) . Soit M le point d'intersection des droites (AD) et (BC) . Soit I le milieu du côté $[AB]$ et J celui du côté $[CD]$. On nomme K le point d'intersection des diagonales $[AC]$ et $[BD]$.

On veut démontrer que M , I , J et K sont alignés.

1. Justifier que $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ est un repère.
2. Donner les coordonnées de A , B , D et I dans ce repère.
3. On nomme a l'abscisse du point C dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$. Déterminer, en fonction de a , les coordonnées de C et de J .
4. Déterminer une équation cartésienne de la droite (BC) et en déduire les coordonnées de M .
5. Montrer que les points M , I et J sont alignés.
6. Déterminer une équation cartésienne de (BD) et de (AC) . En déduire les coordonnées de K .
7. Conclure.