CORRECTION DS 9
REPARTONS À LA DÉRIVE

Exercice 1 : **(10 points)**

- f est définie et dérivable sur $D_{f'} = \mathbb{R}$ car f est une fonction polynôme et $f'(x) = 8x - \dfrac{3}{2}$, $\forall x \in D_{f'}$
- g est définie et dérivable sur $D_{g'} = \mathbb{R}$ car $g = uv$

avec $u(x) = x - 2$ et $v(x) = 3x + 50$

On a $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 3$

et $g' = u'v + v'u$

Donc pour tout $x \in D_{g'}$

$$g'(x) = 1 \times (3x + 50) + 3 \times (x - 2) = 6x + 44$$

- h est définie et dérivable sur $D_{h'} =]0; +\infty[$ car $h = uv$

avec $u(x) = \sqrt{x}$ et $v(x) = x^7 - 1$

On a $u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ et $v'(x) = 7x^6$

et $h' = u'v + v'u$

Donc pour tout $x \in D_{h'}$

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times (x^7 - 1) + 7x^6 \times \sqrt{x}$$

- k est définie et dérivable sur $D_{k'} =]-\infty; 3[\cup]3; +\infty[$ car $k = \dfrac{u}{v}$

avec $u(x) = 12x^2$ et $v(x) = 3 - x$

On a $u'(x) = 24x$ et $v'(x) = -1$

et $k' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$

Donc pour tout $x \in D_{k'}$

$$k'(x) = \frac{24x(3-x) - (-1) \times (12x^2)}{(3-x)^2} = \ldots = \frac{12x(6-x)}{(3-x)^2}$$

- l est définie et dérivable sur $D_{l'} = \mathbb{R}$ car $l = u^n$

avec $u(x) = 7x^3 - 4$ et $n = 2013$

On a $u'(x) = 21x^2$

et $l' = nu'u^{n-1}$

Donc pour tout $x \in D_{l'}$

$$l'(x) = 2013 \times 21x^2 \times (7x^3 - 4)^{2012}$$

- m est définie et dérivable sur $D_{m'} =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ car $m(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{v}$

avec $v(x) = 5x^3$

On a $v'(x) = 15x^2$

et $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$

Donc pour tout $x \in D_{m'}$

$$m'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{15x^2}{\left(5x^3\right)^2} = \ldots = -\frac{1}{x^2} - \frac{3}{5x^4}$$

Exercice 2 : **(10 points)**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (1-x)(2x^2 - x - 37)$$

1. **a.** f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ car $f = uv$

avec $u(x) = 1 - x$ et $v(x) = 2x^2 - x - 37$

On a $u(x) = -1$ et $v'(x) = 4x - 1$

et $f' = u'v + v'u$

Donc pour tout $x \in \mathrm{D}_{m'}$,

$$f'(x) = -(2x^2 - x - 37) + (4x - 1)(1 - x)$$

$$= \ldots = -6x^2 + 6x + 36 = -6(x^2 - x - 6)$$

1b)c),2. et 3c) On cherche le signe de $x^2 - x - 6$.

$\Delta = b^2 - 4ac = \ldots = 25$ et $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \ldots = -2$ et $x_2 = \ldots = 3$

On sait de plus que $y = x^2 - x - 6$ est une parabole ouverte vers le haut. On peut donc en déduire le signe de $f'(x)$ puis le sens de variations de f. Ainsi on a :

x	$-\infty$	x_2	-2	1	3	x_1	$+\infty$
Signe de -6		$-$		$-$		$-$	
Signe de $x^2 - x - 6$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de f	$+\infty$	0	-81	0	44	0	$-\infty$

3. **a.** Dans le tableau on voit qu'il existe $x \in]-\infty; -2[$ tel que $f(x) = 0$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty > 0$ et $f(-2) = -81 < 0$

De même, il existe une solution de $f(x) = 0$ dans $]-2; 3[$ et une solution dans $]3; +\infty[$

Il y a donc trois solutions à l'équation.

b. On cherche les solutions de $f(x) = 0 \iff 1 - x = 0$ ou $2x^2 - x - 37 = 0$

Or $\Delta = 297$ donc $x_1 = \dfrac{1 + \sqrt{297}}{4} = \dfrac{1 + 3\sqrt{33}}{4}$ et $x_2 = \dfrac{1 - 3\sqrt{33}}{4}$

Finalement l'équation a trois solutions : x_2, 1 et x_1 dans l'ordre croissant.

c. On peut alors compléter le tableau de variations de f en plaçant correctement ses racines.

x	$-\infty$		x_2		1		x_1		$+\infty$
Signe de f		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	