Devoir Surveillé (1h)
De la suite dans les idées !

Exercice 1 : Les questions 1 et 2 sont indépendantes. **(3 points)**

Pour chacune des questions, on précisera les formules utilisées.

1. Calculer la somme $S_1 = 1 + 2 + 3 + \cdots + 2012 + 2013$
2. On considère une suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison r. On sait que $u_{20} = 10$ et $u_{34} = -18$.
   a. Calculer la raison r de cette suite puis u_0.
   b. Calculer la somme $S_2 = u_{14} + u_{15} + \cdots + u_{34}$

Exercice 2 : **(3 points)**

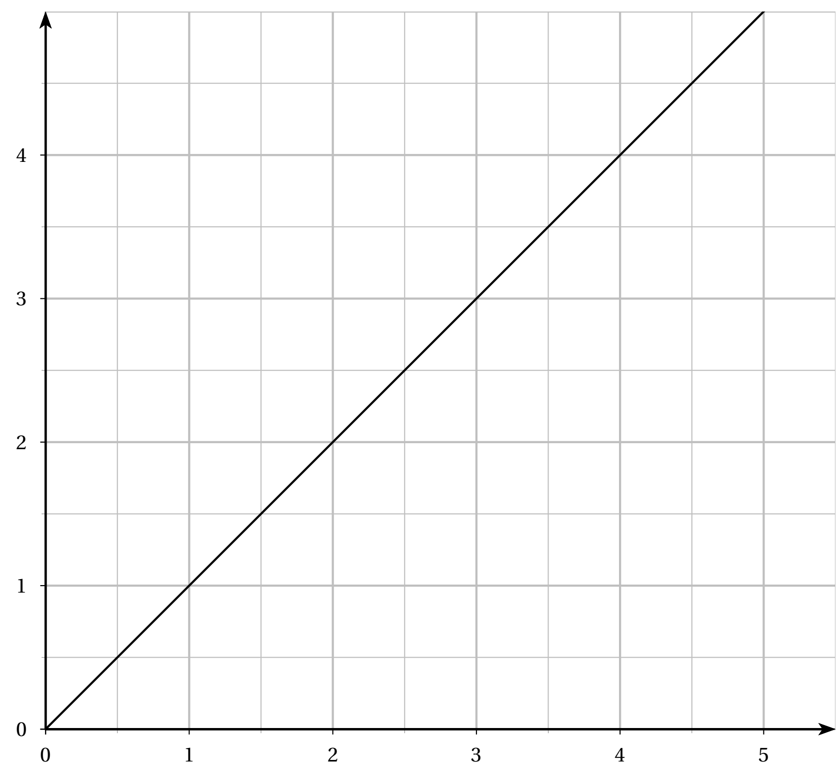
Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + 1 \end{cases}$$

1. Sur l'axe des abscisses du repère orthonormé donné ci-contre, placer les termes u_0 à u_3 de cette suite, en vous appuyant notamment sur la droite

$$\Delta : y = x$$

   déjà tracée.
   On ne fera aucun calcul pour placer les termes.
2. Conjecturer graphiquement le sens de variation et la limite éventuelle de cette suite.



Exercice 3 : **(5 points)**

On considère la suite géométrique définie de la façon suivante $\begin{cases} u_1 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & 2u_n, & \forall n \geq 1 \end{cases}$

1. Calculer u_2 ; u_3 ; u_4.
2. Exprimer u_n en fonction de n.
3. En déduire u_{64}.
4. **La légende du jeu d'échec** : Le roi demanda à l'inventeur du jeu d'échec de choisir lui-même sa récompense. Celui-ci répondit : « place 1 grain de blé sur la première case de l'échiquier, deux grains sur la deuxième case, quatre sur la troisième case, et ainsi de suite jusqu'à la 64$^{\text{ième}}$ case. Le roi sourit de la modestie de la demande.

   Calculer une valeur approchée du nombre total de grains de blé que le roi devra placer sur l'échiquier et commenter.

Exercice 4 : **(5 points)**

Partie A

On considère l'algorithme ci-contre.
Les variables sont le réel U et les entiers naturels k et N.

1. Compléter la trace d'exécution de cet algorithme dans le tableau ci-dessous, avec l'entrée $\mathrm{N} = 3$.
   Indications :
   - Toutes les cases ne sont pas forcément à remplir, c'est à vous de savoir où vous arrêter.
   - Dans la ligne « Test », on attend une réponse du type « Vrai » ou « Faux »
2. Quel est alors l'affichage en sortie ?

Algorithme 1 :

Entrée
Saisir le nombre entier naturel non nul N.
Traitement
Affecter à U la valeur 0
Affecter à k la valeur 0
Tant que $(k \leq \mathrm{N}-1)$ **Faire**
  Affecter à U la valeur $3\mathrm{U}-2k+3$
  Affecter à k la valeur $k+1$
Fin Tant que
Sortie
Afficher U

Trace d'algorithme

Test						
U	0					
k	0					

Partie B

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par l'algorithme ci-dessus.

1. Compléter : $\begin{cases} u_0 & = & \ldots \\ u_{n+1} & = & \ldots & , \forall n \geq 0 \end{cases}$
2. A l'aide d'un tableau de valeurs sur votre calculatrice, conjecturer le sens de variation et la limite éventuelle de cette suite.
3. Modifier l'algorithme précédent pour que, pour une valeur de A donnée en entrée, il renvoit le premier entier n tel que $u_n > \mathrm{A}$.

Exercice 5 : **Problème** **(4 points)**

Dans cet exercice, toute trace de recherche, même incomplète ou d'initiative, même non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.
Cependant, on attend des réponses expliquées et justifiées par des formules du cours et des calculs.

On souhaite construire un château de cartes à n niveaux $(n \geq 1)$. On a représenté ci-dessous un château à quatre niveaux. On appelle $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite dont chaque terme u_n est égal au nombre de cartes du niveau n en partant d'en haut. Ainsi $u_1 = 2$, $u_2 = 5$, $u_3 = 8$, $u_4 = 11$, ...
On admet que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite arithmétique de raison 3 et de premier terme $u_1 = 2$.

1. La rangée la plus basse d'un château possède 23 cartes. Quelle est le nombre de cartes totales de ce château ?
2. On dispose de 500 cartes. Quelle est le nombre de cartes de la rangée du bas du plus grand château que l'on peut fabriquer ?