Correction DS (1h)
De la suite dans les idées !

Exercice 1 :

1. La somme S des n premiers entiers naturels non nuls vaut $\boxed{S = \dfrac{n(n+1)}{2}}$ donc $S = 2013 \times \dfrac{2014}{2} = 2\,027\,091$

   Si vous décidez d'utiliser la formule de la somme des termes consécutifs d'une suite ***arithmétique****, il faut absolument que vous précisiez que* S *est la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 1 et de premier terme 1.*

2. **a.** (u_n) est une suite **arithmétique**, donc on peut utiliser la formule : $\boxed{u_n = u_p + (n-p)r}$.

   Ainsi, $u_{34} = u_{20} + (34-20)r \iff ... \iff r = -2$. De plus, $u_{20} = u_0 + 20r \iff ... \iff u_0 = 50$

   b. (u_n) est une suite **arithmétique**, donc $\boxed{S_2 = (n-p+1) \times \dfrac{u_p + u_n}{2}}$ donc $S_2 = 21 \times \dfrac{u_{14} + (-18)}{2}$.

   Or $u_{14} = u_0 + 14r = ... = 22$ Ainsi $S_2 = ... = 42$

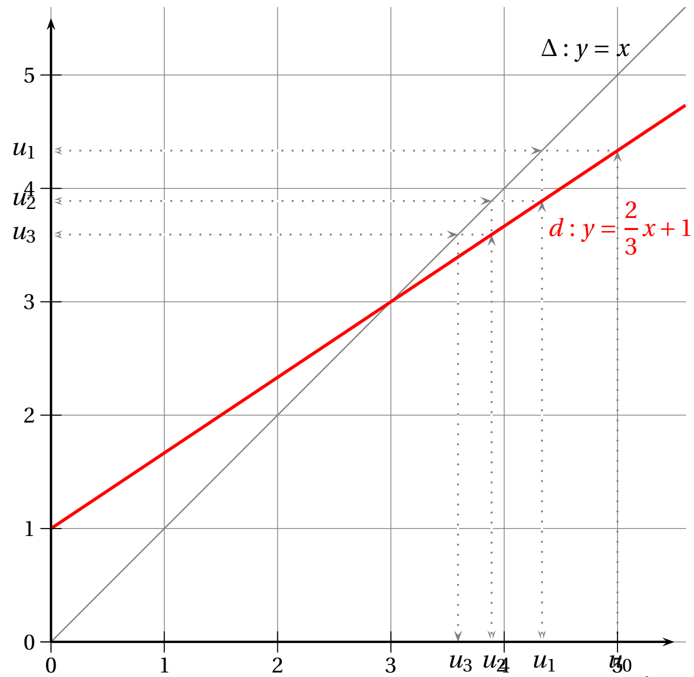
Exercice 2 : **(3 points)**

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

   où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2}{3}x + 1$.
   Donc on trace la droite d d'équation $y = \frac{2}{3}x + 1$.
   Puis $u_1 = f(u_0)$ donc on l'obtient sur l'axe des ordonnées en s'appuyant sur d.
   On reporte cette valeur sur l'axe des abscisses grâce à Δ. Etc.

2. La suite semble décroissante et converger vers l'abscisse du point d'intersection des deux droites, à savoir $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 3$



Exercice 3 : **(5 points)**

1. On a $u_2 = 2u_1 = 2$, $u_3 = 2u_2 = 4$, $u_4 = 2u_3 = 8$

2. u_n est une suite **géométrique** de raison $q = 2$ et de premier terme $u_1 = 1$. Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $\boxed{u_n = u_1 \times q^{n-1}}$ Donc $u_n = ... = 2^{n-1}$

3. Donc $u_{64} = 2^{63} \simeq 9{,}2 \times 10^{18}$

4. On reconnaît que le nombre de grains de blé sur la case numéro n vaut u_n. Comme, on cherche la somme des grains, on veut calculer $\boxed{S = u_1 + u_2 + ... u_n = u_1 \times \dfrac{1-q^n}{1-q}}$ car (u_n) est **géométrique**.

   Donc $S = 1 \times \dfrac{1-2^{64}}{1-2} = ... = 2^{64} - 1 \simeq 1.8 \times 10^{19}$.
   L'inventeur du jeu d'échec n'était pas si modeste ! Et le roi était bien naïf, il aurait mieux fait de connaître ses formules sur les suites géométriques avant d'accepter ...

Exercice 4 : **(5 points)**

Partie A

1. Le test d'entrée dans la boucle se fait avec la dernière valeur de k enregistrée par l'ordinateur. Il est donc important de remplir de tableau par colonne au fur et à mesure, comme le fait l'ordinateur ...

Test		Vrai ($0 \leq 2$)	Vrai ($1 \leq 2$)	Vrai ($2 \leq 2$)	Faux ($3 \not\leq 2$)	
U	0	3	10	29		
k	0	1	2	3		

2. L'algorithme en sortie affiche 29.

Partie B

1. $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 3u_n - 2k + 3 \end{cases}, \forall n \geq 0$

2. Les calculatrices demandent u_n, donc on doit adapter les indices :

$$u_n = 3u_{n-1} - 2(n-1) + 3$$

TI 82 à 84	**TI 89**	**TI Nspire CX Cas**
`nmin = 0` `u(n)=3u(n-1)-2(n-1)+3` `u(nmin)=0`	`u1(n)=3u1(n-1)-2(n-1)+3` `ui1=0`	*u1(n)=3u1(n-1)-2(n-1)+3* *Valeurs initiales : 0* $0 \leq n \leq 99$

3. On veut entrer une valeur pour A. La première chose à changer est donc de demander A à l'utilisateur, et non N.
Ensuite on veut que l'ordinateur calcule les termes u_n jusqu'à dépasser (strictement) cette valeur A, donc tant que $u_n \leq$ A. On change donc la condition dans la boucle.
La boucle s'arrêtera dès que $u_k >$ A et renverra la valeur de k correspondante.

Algorithme 1 : *Modifié*

Entrée
Saisir le nombre entier naturel non nul A.
Traitement
Affecter à U la valeur 0
Affecter à k la valeur 0
Tant que (U ≤ A) **Faire**
  Affecter à U la valeur $3\text{U} - 2k + 3$
  Affecter à k la valeur $k + 1$
Fin Tant que
Sortie
Afficher k

Exercice 5 : **Problème** **(4 points)**

1. On cherche la somme des termes consécutifs de la suite **arithmétique** (u_n) jusqu'au terme valant 23.
Commençons alors par trouver n tel que $u_n = 23$ (ie le numéro de l'étage correspondant).
(u_n) est arithmétique, donc $\boxed{u_n = u_1 + (n-1)r}$ $\iff 23 = 2 + 3(n-1) \iff \ldots \iff n = 8$ et $u_8 = 23$
On calcule alors $\boxed{\text{S} = u_1 + u_2 + \ldots + u_8 = 8 \times \dfrac{u_1 + u_8}{2}}$ Donc S = ... = 100. Le château contient 100 cartes.

2. Cherchons déjà le nombre d'étages maximal d'un tel château.
Un château à n étages contient $\boxed{\text{S} = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = n \times \dfrac{u_1 + u_n}{2}}$ cartes. Donc $\text{S} = \ldots = n \times \dfrac{3n+1}{2}$
On cherche le plus grand entier n tel que $n \times \dfrac{3n+1}{2} \leq 500 \iff n(3n+1) \leq 1000 \iff 3n^2 + n - 1000 \leq 0$.
On cherche alors le **signe** d'un polynôme de degré 2 (on ne sait faire que si l'un des membres de l'inéquation vaut 0).
Donc on calcule $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$ $= \ldots = 12001$ donc $\boxed{n_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2 \times a}}$ $= \ldots \simeq 18,1$ et $n_2 = \ldots \simeq -18 < 0$ (impossible).
Le polynôme est représenté par une parabole ouverte vers le haut (car $3 > 0$), donc il est négatif entre ses racines.
Le plus grand entier n tel que $3n^2 + n - 1000 \leq 0$ est donc 18 (le plus grand inférieur à 18.1).
Ainsi, le château a 18 étages.
On cherche désormais le nombre de cartes de l'étage 18, ie $u_{18} = u_1 + (18-1)r = \ldots = 53$
La rangée du bas contient 53 cartes.