# Devoir Surveillé 6 : Correction

## Exercice 1 : Points alignés **(4 points)**

1. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x-2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 1 \\ x+1 \end{pmatrix}$ Or A, B et C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires ie si et seulement si $(x-2)(x+1)-3\times 1=0 \iff \dots \iff x^2-x-5=0$
2. On résout l'équation ci-dessus : $\Delta=(-1)^2-4\times 1\times(-5)=21$.
   Donc les valeurs possibles pour $x$ sont $x_1=\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}$ et $x_2=\dfrac{1-\sqrt{21}}{2}$

## Exercice 2 : Parallélisme **(3 points)**

1. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix}$ On constate que $\overrightarrow{CD}=-\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.
   Ces vecteurs sont colinéaires, on peut donc en conclure que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
2. ABCE est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{EC}$.
   On pose $(x;y)$ les coordonnées de E. On doit donc avoir $\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}=\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 4-x \\ 2-y \end{pmatrix} \iff \dots \iff \begin{cases} x=6 \\ y=-4 \end{cases}$
   D'où $E(6;-4)$

## Exercice 3 : Problème **(13 points)**

**PARTIE A.** **Sans coordonnées**

1. On a $\overrightarrow{BF}=2\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{AC}+5\overrightarrow{CA}=-2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$
2. On a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AG}+2\overrightarrow{BG}+3\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{0} &\iff \overrightarrow{AG}=-2\overrightarrow{BG}-3\overrightarrow{CG}\\
&\iff \overrightarrow{AG}=-2\overrightarrow{BA}-2\overrightarrow{AG}-3\overrightarrow{CA}-3\overrightarrow{AG}\\
&\iff 6\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}\\
&\iff \overrightarrow{AG}=\frac{2}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{6}\overrightarrow{AC}\\
&\iff \overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}
\end{aligned}$$

3. Cf figure.
4. On a $6\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{BF} \iff \overrightarrow{BF}=-6\overrightarrow{AG}$ Les vecteurs $\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont colinéaires de sens contraires.
   Le quadrilatère AGBF est donc un trapèze.

**PARTIE B.** **Avec coordonnées**

1. Les points A, B et C ne sont pas alignés, donc $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ est bien un repère du plan.
2. $A(0;0)$, $B(1,0)$, $C(0,1)$ et $G\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{2}\right)$ d'après la question 2 de la partie A.
3. On cherche les coordonnées de $\overrightarrow{AF}$. On a $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\dots=-\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$ Donc $F(-1;-3)$.
4. $\overrightarrow{BF}\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ qui est un vecteur directeur de (BF). Donc (BF) a une équation du type $-3x+2y=c$ avec $c\in\mathbb{R}$.
   De plus, on sait que $B\in(BF)$ donc ses coordonnées vérifient l'équation de (BF) et on a $-3\times 1+2\times 0=c \iff$

$c=-3$.
Ainsi (BF) : $-3x+2y=-3$.

**5.** **a.** On regarde si les coordonnées de E vérifient l'équation de $\mathscr{D}$ : $\frac{3}{2}\times 2-\frac{3}{2}=\ldots=\frac{3}{2}\neq 0$. Donc E $\notin \mathscr{D}$.

On note K$\left(x;-\frac{3}{2}\right)$. On sait que K $\in\mathscr{D}$ donc ses coordonnées vérifient l'équation de $\mathscr{D}$ ie

$\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}=0 \iff x=1$. Donc K$\left(1;-\frac{3}{2}\right)$.

**b.** Un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ est $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\ \frac{3}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BF}\begin{pmatrix}-2\\ -3\end{pmatrix}$

Or $-1\times -3-\frac{3}{2}\times(-2)=3+3=6\neq 0$ donc les droites (BF) et $\mathscr{D}$ sont sécantes. On cherche les coordonnées $(x;y)$ de leur point d'intersection, qui vérifient le système :

$$\begin{cases}-3x+2y=-3\\ \frac{3}{2}x+y=0\end{cases} \overset{2L_2}{\iff} \begin{cases}-3x+2y=-3\\ 3x+2y=0\end{cases} \overset{L_1+L_2}{\iff} \begin{cases}-3x+2y=-3\\ 4y=-3\end{cases} \iff \ldots \iff \begin{cases}y=-\frac{3}{4}\\ x=\frac{1}{2}\end{cases}$$ Donc I$\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{4}\right)$

**c.** La droite $\mathscr{D}$ passe par les points I et K.