DEVOIR SURVEILLÉ 4 : LOI BINOMIALE ET SECOND DEGRÉ (2H)

Exercice 1 : (11 points)

Soient P et T les trinômes définis sur $\mathbb{R}$ par :

$$P(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 5 \qquad \text{et} \qquad T(x) = -x^2 + 9x - 13$$

On appelle respectivement $\mathscr{C}_P$ et $\mathscr{C}_T$ leurs courbes réprésentatives dans un repère orthonormé.

1. **a.** Pour P : $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times \frac{1}{2} \times 5 = 9 - 10 = -1 < 0$

Donc P n'a pas de racine. Son signe est le même que celui de $a = \frac{1}{2}$, à savoir $P(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Pour T : $\Delta = 9^2 - 4 \times (-1) \times (-13) = 81 - 52 = 29 > 0$

Donc T admet deux racines qui sont :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2 \times (-1)} = \frac{-9 - \sqrt{29}}{-2} = \frac{9 + \sqrt{29}}{2} \qquad \text{et } x_2 = \frac{9 - \sqrt{29}}{2}$$

Et $T(x)$ est du signe de $a = -1$ sauf entre ses racines. On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		x_2		x_1		$+\infty$
Signe de T		$-$	0	$+$	0	$-$	

b. $P(0) = 5$ et $T(0) = -13$ (calculs immédiats).

2. **a.** D'après la question 1), $\mathscr{C}_P$ ne coupe pas l'axe des abscisses, et coupe l'axe des ordonnées en $A(0;5)$.

b. $\mathscr{C}_T$ coupe l'axe des abscisses en $B(x_1;0)$ et $C(x_2;0)$ et l'axe des ordonnées en $D(0;-13)$.

c. D'après la question 1), la courbe $\mathscr{C}_P$ est toujours au-dessus de l'axe des abscisses.

d. La courbe $\mathscr{C}_T$ est au-dessus de l'axe des abscisses sur $]x_2; x_1[$.

3. **a.** On cherche à résoudre l'équation $P(x) = T(x)$:

$$\frac{1}{2}x^2 - 3x + 5 = -x^2 + 9x - 13 \iff \frac{1}{2}x^2 - 3x + 5 + x^2 - 9x + 13 \iff \frac{3}{2}x^2 - 12x + 18 = 0$$

$\Delta = (-12)^2 - 4 \times \frac{3}{2} \times 18 = 144 - 108 = 36 > 0$

Donc l'équation a deux solutions $\quad x_1 = \dfrac{-(-12) - \sqrt{36}}{2 \times \frac{3}{2}} = \dfrac{12 - 6}{3} = 2 \quad$ et $\quad x_2 = \dfrac{12 + 6}{3} = 6$

De plus $P(2) = 1$ et $P(6) = 5$. Donc les points d'intersection de $\mathscr{C}_P$ et $\mathscr{C}_T$ sont $E(2;1)$ et $F(6;5)$.

b. On établit le tableau de signe de l'expression $P(x) - T(x)$:

x	$-\infty$		2		6		$+\infty$
Signe de T		$+$	0	$-$	0	$+$	

D'après ce tableau, la courbe $\mathscr{C}_P$ est au-dessus de $\mathscr{C}_T$ pour $x \in]-\infty; 2[$ et $x \in]6; +\infty[$

Exercice 2 : (5 points)

1. On sait que $f(x) = a(x-(-2))(x-5) = a(x+2)(x-5)$ et $f(0) = 2$
Donc on a $a(0+2)(0-5) = 2 \iff a \times 2 \times (-5) = 2 \iff a = -\frac{1}{5}$.
D'où $f(x) = -\frac{1}{5}(x+2)(x-5)$

2. La courbe est symétrique par rapport à l'axe $x = \alpha$ et comme $f(-2) = f(5) = 0$ on a $\alpha = \frac{-2+5}{2} = \frac{3}{2}$
De plus $\beta = f(\alpha) = -\frac{1}{5}\left(\frac{3}{2}+2\right)\left(\frac{3}{2}-5\right) = -\frac{1}{5} \times \frac{7}{2} \times \frac{-7}{2} = \frac{49}{20}$

3. Ainsi la forme canonique de f est $f(x) = -\frac{1}{5}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{49}{20}$
et sa forme développée est $f(x) = -\frac{1}{5}(x^2-5x+2x-10) = -\frac{1}{5}(x^2-3x-10) = -\frac{1}{5}x^2 + \frac{3}{5}x + 2$

4.

x	$-\infty$		-2		$\frac{3}{2}$		5		$+\infty$
Variations de f		↗	0	↗	$\frac{49}{20}$	↘	0	↘	
Variations de $\lvert f\rvert$		↘	0	↗	$\frac{49}{20}$	↘	0	↗	
Variations de $\frac{1}{\lvert f\rvert}$		↗	‖	↘	$\frac{20}{49}$	↗	‖	↘	
Variations de $\frac{-3}{\lvert u\rvert}$		↘	‖	↗	$-\frac{60}{49}$	↘	‖	↗	
Variations de $\frac{-3}{\lvert u\rvert}+1$		↘	‖	↗	$-\frac{11}{49}$	↘	‖	↗	

Exercice 3 : (2 points)

Soit x le premier de ces trois entiers. Les autres sont alors $(x+1)$ et $(x+2)$. Ainsi on cherche x tel que

$$x^2+(x+1)^2 = (x+2)^2 \iff x^2+x^2+2x+1 = x^2+4x+4 \iff x^2-2x-3 = 0$$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 4+12 = 16$ Donc les solitions sont $x_1 = \frac{2-4}{2} = -1$ et $\frac{2+4}{2} = 3$
Ainsi les seules suites de nombres recherchées sont -1, 0, 1 et 3, 4, 5.

Exercice 4 : (2 points)

1. On a $\Delta = (-(2m+3))^2 - 4 \times 1 \times m^2 = (2m+3)^2 - 4m^2 = 4m^2+12m+9-4m^2 = 12m+9$
On veut $\Delta = 0 \iff m = \frac{-9}{12}$ Donc il faut que $m = -\frac{3}{4}$.

2. Dans ce cas la racine est $x = \frac{2m+3}{2} = m + \frac{3}{2} = -\frac{3}{4} + \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$

Exercice 5 : (2 points)

On sait que $V(X) = np(1-p) = 10p(1-p) = 2$. Donc on cherche à résoudre $10p - 10p^2 = 2 \iff -5p^2 + 5p - 1 = 0$

$\Delta = 25 - 4 \times (-5) \times (-1) = 25 - 20 = 5$

Donc $p_1 = \dfrac{-5-\sqrt{5}}{-10} = \dfrac{5+\sqrt{5}}{10}$ ou $p_2 = \dfrac{5-\sqrt{5}}{10}$

Comme $p > \dfrac{1}{2}$ on en déduit $p = p_1$

Exercice 6 : (8 points)

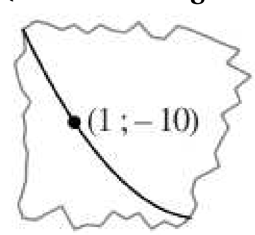
1. Le dentiste répète 15 fois de manière identique et indépendante l'épreuve de Bernoulli consistant à arracher une dent malade ou non. Le succès étant « la dent est malade » et sa probabilité étant de 0.4. X compte le nombre de succès de cette expérience donc X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(15, 0.4)$.
2. $P(X = 0) = 0.6^{15} \simeq$ car cela correspond au chemin de l'arbre ne contenant que des échecs.
3. $P(X = 11) = \binom{15}{11} \times 0.4^{11} \times 0.6^4 \simeq$
4. $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - 0.6^{15} - 15 \times 0.4 \times 0.6^{14} \simeq$
5. $E(X) = np = 15 \times 0.4 = 6 < 7$. Donc le dentiste a mieux réussi que ce qu'il pouvait espérer. Il peut être satisfait.
6. La valeur la plus représentées sur le graphique doit être $E(x) = 6$, donc le premier graphique peut représenter la loi $\mathcal{B}(15; 0.4)$.
7. **a.** On appelle Y la variable aléatoire qui compte l'argent gagné en une journée par le dentiste. On a $Y = 30 \times 15 + 20X$. Donc $E(Y) = 450 + 20E(X) = 450 + 20 \times 6 = 570$.
   Le dentiste peut espérer gagner 150€ par jour.

   b. Cette fois, on ne connait pas p, mais on sait que $E(X) = 15p$ donc $E(Y) = 450 + 20 \times 15 \times p$.
   On cherche donc p tel que $450 + 300p \geq 510 \iff 300p \geq 60 \iff p \geq \dfrac{1}{5}$.
   A partir de la probabilité $\dfrac{1}{5}$, ce métier lui permet de gagner plus de 510€ par jour.

Exercice 7 : **Bonus (extrait du Kangourou 2011)**

Dans le plan rapporté aux axes Ox et Oy en positions usuelles (Ox horizontal et Oy vertical), on a tracé une parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passant par le point $(1 ; -10)$.
On a alors effacé les axes et une partie de la courbe en ne laissant que le dessin ci-contre.
Parmi les affirmations suivantes, laquelle peut être fausse ?

A) $a > 0$ B) $b < 0$ C) $a + b + c < 0$
D) $b^2 > 4ac$ E) $c < 0$



Justifier