DEVOIR SURVEILLÉ 4 :
LOI BINOMIALE ET SECOND DEGRÉ (2H)

Exercice 1 : (11 points)

Soient P et T les trinômes définis sur $\mathbb{R}$ par :

$$\mathrm{P}(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 5 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{T}(x) = -x^2 + 9x - 13$$

On appelle respectivement $\mathscr{C}_\mathrm{P}$ et $\mathscr{C}_\mathrm{T}$ leurs courbes répésentatives dans un repère orthonormé.

1. **a.** Etablir les tableaux de signes des trinômes P et T.

   b. Calculer P(0) et T(0).

2. Déduire de la question 1 les réponses aux questions suivantes :

   a. Déterminer les éventuels points d'intersections de la courbe $\mathscr{C}_\mathrm{P}$ avec les axes du repère.

   b. Même question pour $\mathscr{C}_\mathrm{T}$.

   c. Pour quelles valeurs de x la parabole $\mathscr{C}_\mathrm{P}$ est-elle située au-dessus de l'axe des abscisses ?

   d. Même question pour $\mathscr{C}_\mathrm{T}$.

3. **a.** Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}_\mathrm{P}$ et $\mathscr{C}_\mathrm{T}$.

   b. Pour quelles valeurs de x la courbe $\mathscr{C}_\mathrm{P}$ est-elle située au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_\mathrm{T}$. *Justifier.*

Exercice 2 : (5 points)

Soit f une fonction polynôme de degré 2. On donne son tableau de variations ci-dessous.

x	$-\infty$	-2	0	$\cdots$	5	$+\infty$
Variations de f		0	2	$\cdots$	0	

1. A partir de ce tableau, retrouver la forme factorisée de f.
2. Compléter le tableau, en expliquant succinctement vos réponses.
3. En déduire la forme canonique de f et sa forme développée.
4. A partir de ce tableau, établir le tableau de variations de la fonction g définie par $g(x) = -\dfrac{3}{|f(x)|} + 1$ sur le plus grand ensemble possible. *Justifier en utilisant la méthode des tableaux de variations successifs*

Exercice 3 : (2 points)

Trouver toutes les suites de 3 entiers consécutifs tels que la somme des carrés des deux premiers nombres soit égale au carré du dernier.

Exercice 4 : (2 points)

Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère la trinôme suivant : $x^2 - (2m+3)x + m^2$

1. Pour quelle valeur de m a-t-il une unique racine ?
2. Calculer alors la valeur de cette racine.

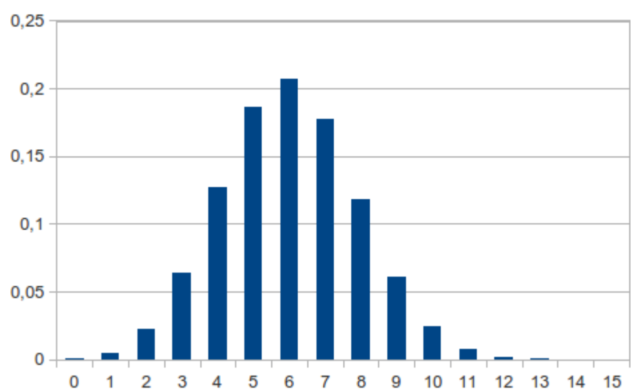
Exercice 5 : (2 points)

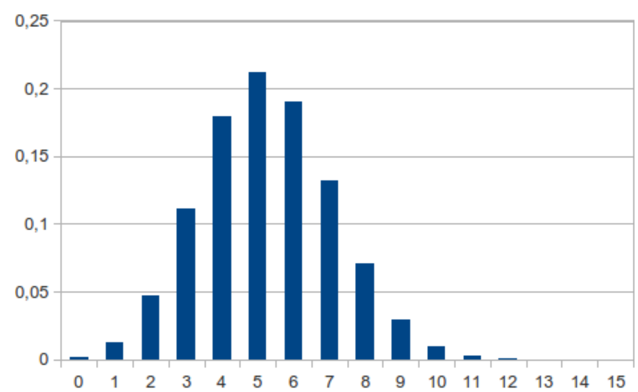
Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres 10 et p avec $p > \dfrac{1}{2}$.
Sachant que $V(X) = 2$, calculer p puis $E(X)$.

Exercice 6 : (8 points)

Le ministre syldave a supprimé la faculté de médecine. L'unique dentiste de Gattaca est un ancien boxeur, à moitié-aveugle et parkinsonien.
Les syldaves venant le consulter se font toujours arracher une dent.
Le dentiste arrive à peu près à discerner la dent malade grâce aux indications des patients, et essaie toujours d'extraire celle-ci, mais sa maladie le faisant trembler, il n'a qu'une probabilité de 0.4 de réussir.
Le dentiste reçoit quinze clients par jour, en on note X le nombre de dents malades extraites à bon escient sur ces quinze clients.

1. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X. *Justifier.*
2. Calculer la probabilité pour qu'aucun des patients n'y laisse une dent malade.
3. Calculer la probabilité que le dentiste arrache exactement 11 dents malades.
4. Calculer la probabilité pour que le dentiste arrache au moins 2 dents malades.
5. Finalement, le dentiste a extrait 7 dents malades. Peut-il être satisfait de lui-même ?
6. Parmi les deux diagrammes en barres suivant, lequel peut représenter la loi de probabilité de X ? *Justifier*

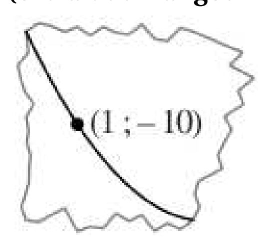




7. Avant chaque intervention, le patient paie 30€, puis le dentiste lui arrache une dent. Si c'est la bonne, le patient doit encore payer 20€.
   - **a.** Combien le dentiste peut-il espérer gagner d'argent en une journée ? Justifier.
   - **b.** Les tremblements du dentiste empirant, sa probabilité d'extraire une dent malade risque de baisser. A partir de quelle probabilité de réussite ce métier lui permet-il de gagner plus de 510€ par jour ?

Exercice 7 : **Bonus (extrait du Kangourou 2011)**

Dans le plan rapporté aux axes Ox et Oy en positions usuelles (Ox horizontal et Oy vertical), on a tracé une parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passant par le point $(1\,;-10)$.
On a alors effacé les axes et une partie de la courbe en ne laissant que le dessin ci-contre.
Parmi les affirmations suivantes, laquelle peut être fausse ?



A) $a > 0$ B) $b < 0$ C) $a + b + c < 0$
D) $b^2 > 4ac$ E) $c < 0$

Justifier