DEVOIR COMMUN n°1 : ELEMENTS DE CORRECTION

Exercice 1	*11,5 points*

1. a. $\frac{223}{6} \approx 37{,}2$. La mesure principale de $\frac{223\pi}{6}$ est $\frac{223\pi}{6} - 38\pi = \frac{223\pi}{6} - \frac{228\pi}{6} = \mathbf{-\frac{5\pi}{6}}$

Pour bien placer le point **A**, il faut utiliser son ordonnée…

b. $\cos\frac{223\pi}{6} = \cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = \mathbf{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$; $\sin\frac{223\pi}{6} = \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = \mathbf{-\frac{1}{2}}$

2. a. Résoudre $\cos x = -\frac{1}{2}$ revient à résoudre $\cos x = \cos\mathbf{\frac{2\pi}{3}}$. A partir du cercle trigonométrique, on déduit que dans $\mathbb{R}$ les solutions de cette équation sont : $\left\{ \mathbf{-\frac{2\pi}{3} + 2p\pi \text{ avec } p \in \mathbb{Z}\ ,\ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}} \right\}$

b. Dans l'intervalle $]\pi\ ; 3\pi]$, cette équation a deux solutions $\mathbf{\frac{4\pi}{3}}$ et $\mathbf{\frac{8\pi}{3}}$

3. a. Comme $\mathbf{(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1}$, on a $\left(\frac{1}{4}\right)^2 + (\sin x)^2 = 1$, …*calculs*… d'où $\sin x = \frac{\sqrt{15}}{4}$ **ou** $\sin x = -\frac{\sqrt{15}}{4}$

Etant donné que $\mathbf{x \in [0\ ;\ \pi]}$, $\sin x \geq 0$. On a donc finalement : $\mathbf{\sin x = \frac{\sqrt{15}}{4}}$

b. $\cos(-x) = \cos x = \frac{1}{4}$; $\cos(\pi - x) = -\cos x = -\frac{1}{4}$; $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x = \frac{1}{4}$; $\sin(x + \pi) = -\sin x = -\frac{\sqrt{15}}{4}$.

Exercice 2	*10 points*

1. a. si $x = 3$, alors $y = 3 - 2 = \mathbf{1}$; **b.** si $x = -2$, alors $y = -(-2) - 6 = \mathbf{-4}$;
c. si $x = \pi - 6$, alors $y = -(\pi - 6) - 6 = \mathbf{-\pi}$

2. a. si $y = -1$, alors : - soit $x - 2 = -1$ et donc $x = 1$. C'est une solution possible puisque $1 > -2$.
- soit $-x - 6 = -1$ et donc $x = -5$. C'est une solution possible puisque $-5 \leq -2$.

Cet algorithme peut donc afficher en sortie $y = -1$ avec deux valeurs x possibles en entrée : –5 et 1.

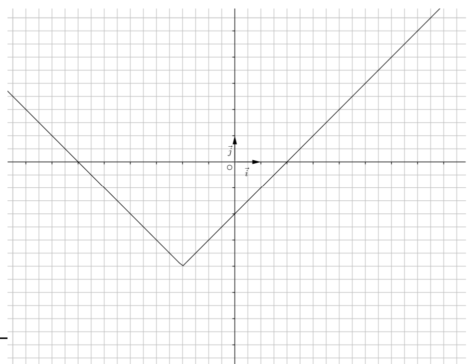
b. si $y = -5$, alors : - soit $x - 2 = -5$ … $x = -3$. Impossible puisque dans ce cas il faut que $x > -2$.
- soit $-x - 6 = -5$ … $x = -1$. Impossible puisqu'il faut ici que $x \leq -2$.

Cet algorithme ne peut donc pas afficher en sortie $y = -5$.

3. a. Effectuons une étude par *disjonction des cas*, la valeur de $f(x)$ dépendant du signe de $(x + 2)$:
¤ $f(x) = |x + 2| - 4 = (x + 2) - 4 = x - 2$ si $x + 2$ est positif, c'est-à-dire si $x \geq -2$.
¤ $f(x) = |x + 2| - 4 = -(x + 2) - 4 = -x - 6$ si $x + 2$ est négatif, c'est-à-dire si $x \leq -2$

Autrement dit **:** $\mathbf{f(x) = \begin{cases} x - 2 & si\ x \geq -2 \\ -x - 6 & si\ x \leq -2 \end{cases}}$

Remarque : la solution était donnée par l'algorithme !



b. Représentation graphique ci-contre (deux demi-droites à tracer…)

c. Graphiquement, l'équation $f(x) = -1$ admet deux solutions –5 et 1.
En revanche, l'équation $f(x) = -5$ n'admet aucune solution.
Remarque : ces réponses correspondent à la question 2…

Exercice 3	*10,5 points*

Partie A

1. La loi de probabilité de G est :

g_i	–10	0	30
$p(G = g_i)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$	$\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

2. $E(G) = -10\times\frac{3}{10} + 0\times\frac{1}{2} + 30\times\frac{1}{5} = \mathbf{3}$

3. a. <u>Au bout d'un grand nombre de parties</u>, Fabrice devrait gagner de l'argent vu que l'espérance est positive… <u>Mais</u> avec un peu de malchance, il peut effectivement perdre son argent !

b. Durant cette simulation, Charlotte aurait gagné 950 € en 500 parties soit 1,7 € par partie.
Vu que l'espérance est de 3 €, on peut considérer que Charlotte a été plutôt malchanceuse sur un grand nombre de parties comme 500 dans cette simulation.

Partie B

1. La loi de probabilité de G est :

g_i	-10	0	30
$p(G = g_i)$	$\frac{n}{7+n}$	$\frac{5}{7+n}$	$\frac{2}{7+n}$

2. $\mathrm{E}(G) = -10\times\frac{n}{7+n} + 0\times\frac{5}{7+n} + 30\times\frac{2}{7+n} = \mathbf{\frac{60-10n}{7+n}}$

3. *Cette solution présente une démarche possible mais il y a d'autres méthodes de résolution possible comme par étude de la fonction* $n \longmapsto \frac{60-10n}{7+n}$ *en utilisant notamment la calculatrice par exemple…*

Déterminer le nombre minimum de cases rouges qu'il doit prévoir pour ne pas perdre d'argent revient à déterminer le plus petit entier n tel que $\mathrm{E}(G) \leq -2$, soit tel que :

$$\mathbf{\frac{60-10n}{7+n} \leq -2} \iff \frac{60-10n}{7+n} + 2 \leq 0 \iff \frac{60-10n}{7+n} + \frac{2(7+n)}{7+n} \leq 0 \iff \mathbf{\frac{74-8n}{7+n} \leq 0}.$$

Pour résoudre cette inéquation, réalisons un tableau de signe de l'expression $\frac{74-8n}{7+n}$:

$74 - 8n = 0 \iff n = \frac{74}{8} = \frac{37}{4}$; $7 + n = 0 \iff n = -7$ (valeur interdite)

n	$-\infty$		-7		$\frac{37}{4}$		$+\infty$
$74-8n$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$7+n$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$\frac{74-8n}{7+n}$		$-$	||	$+$	0	$-$	

Comme n est positif, il faut que $n \geq \frac{37}{4}$ et puisque n est un entier, il faut que $n \geq 10$.

Conclusion : le nombre minimum de cases rouges qu'il doit prévoir pour ne pas perdre d'argent est $\mathbf{n = 10}$.

Exercice 4 *13,5 points*

1. a. Tableau de signe de l'expression $(1 - x)(1 + x)$ à refaire si non réussi ! Indispensable pour la suite en S…
b. Pour que la fonction f soit définie, il faut que l'expression sous la racine carrée soit positive.
Comme $1 - x^2 = (1 - x)(1 + x)$, en utilisant le tableau de signe de la question 1.a. …
2. Variations de la fonction f sur $[-1 ; 1]$ à effectuer avec tableaux successifs. Voir en AP si besoin.
3. a. $\mathbf{M(x ; \sqrt{1-x^2})}$ puis Pythagore ou formule d'une longueur (2^nde^) pour conclure que OM = 1
b. Le plus rapide est d'utiliser vos connaissances de **trigonométrie** qui permette d'écrire que $f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2}$
4. *Cette solution présente une démarche possible mais il y a d'autres méthodes de résolution possibles…*
En observant le tableau, on se rend compte que la variation de l'aire du carré AMBC est le double de la variation des abscisses correspondantes. Cette situation correspond à une fonction affine dont le coefficient directeur est 2 (programme de 3ème). On aurait donc : $A(x) = 2x + b$ où b est un réel qu'il faut déterminer.
Comme $A(0) = 2$, on en déduit que $2\times0\times + b = 2$, soit $b = 2$.
On peut donc conjecturer que $\mathbf{A(x) = 2x + 2}$.
Remarque : ce résultat n'est qu'une conjecture car notre tableau de valeurs ne nous permet pas d'affirmer que cela soit juste pour tout x de l'intervalle [-1 ; 1].

5. a. AH = $\mathbf{1 + x}$ et HM = $\sqrt{\mathbf{1 - x^2}}$ **b.** Pythagore dans AHM… AM = $\sqrt{\mathbf{2 + 2x}}$.
c. $A(x) = \mathrm{AM}^2 = (\sqrt{2+2x})^2 = \mathbf{2 + 2x}$ (ce qui confirme la conjecture du 4.)
d. On souhaite que $A(x) = \frac{1}{2}\pi 1^2 = \frac{\pi}{2}$ ce qui revient à résoudre $\mathbf{2 + 2x = \frac{\pi}{2}}$, soit $x = \frac{\pi}{4} - 1$.

Comme $\mathbf{\left(\frac{\pi}{4} - 1\right) \in [-1 ; 1]}$, c'est la solution au problème posé !