DEVOIR COMMUN n°1 de 1ère S **MATHEMATIQUES**	Session 2013	Durée : 2 heures
	Jeudi 10 janvier 2013 de 16h à 18h	
	2 pages	

NOM – Prénom : …………………………………	Classe : ………	Note : …… **/ 40**

L'usage des instruments de calcul et de dessin est autorisé, mais l'utilisation d'un téléphone portable et de tout autre document est strictement interdite.

L'attention des candidats est attirée sur le fait que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

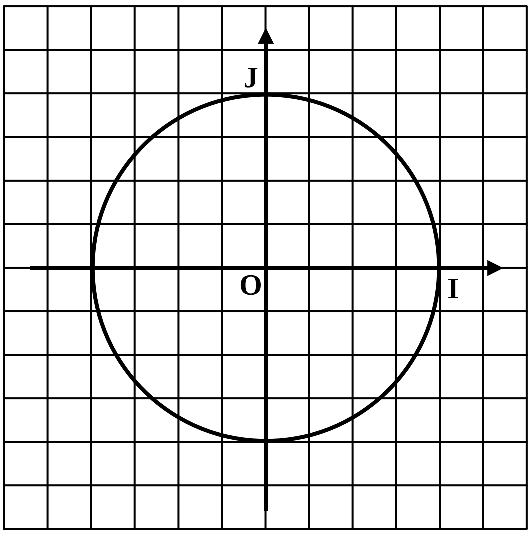
CET ENONCE DOIT ABSOLUMENT ETRE RENDU AVEC LA COPIE

Exercice 1 *10 points*

Cet exercice est composé de trois questions qui peuvent être traitées indépendamment.

Question 1. **a.** Déterminer, en justifiant votre réponse, la mesure principale de $\frac{223\pi}{6}$ puis placer, sur le cercle trigonométrique ci-dessous, le point **A** repéré par le réel $\frac{223\pi}{6}$.

b. En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{223\pi}{6}$ et de $\sin\frac{223\pi}{6}$.



Question 2. **a.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos x = -\frac{1}{2}$

b. En déduire les solutions de cette même équation dans l'intervalle $]\pi\,;\,3\pi]$.

Question 3. Soit un réel x de l'intervalle $[0\,;\,\pi]$ tel que $\cos x = \frac{1}{4}$.

a. Déterminer une valeur exacte de $\sin x$.

b. En déduire les valeurs exactes de $\cos(-x)$, $\cos(\pi - x)$, $\sin(x + \pi)$ et $\sin(\frac{\pi}{2} - x)$.

Exercice 2	*9 points*

On considère l'algorithme suivant :

Variables :	x et y sont deux nombres réels.
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de x.
Initialisation :	Affecter à y la valeur 0.
Traitement :	Si $x > -2$, alors y prend la valeur $x - 2$. Si $x \leq -2$, alors y prend la valeur $-x - 6$.
Sortie :	Afficher y.

1. Ecrire le calcul effectué et donner la valeur exacte y donnée en sortie par cet algorithme lorsque l'utilisateur entre :

a. la valeur $x = 3$; **b.** la valeur $x = -2$; **c.** la valeur $x = \pi - 6$.

2. Cet algorithme peut-il afficher en sortie : **a.** le nombre $y = -1$? **b.** le nombre $y = -5$?

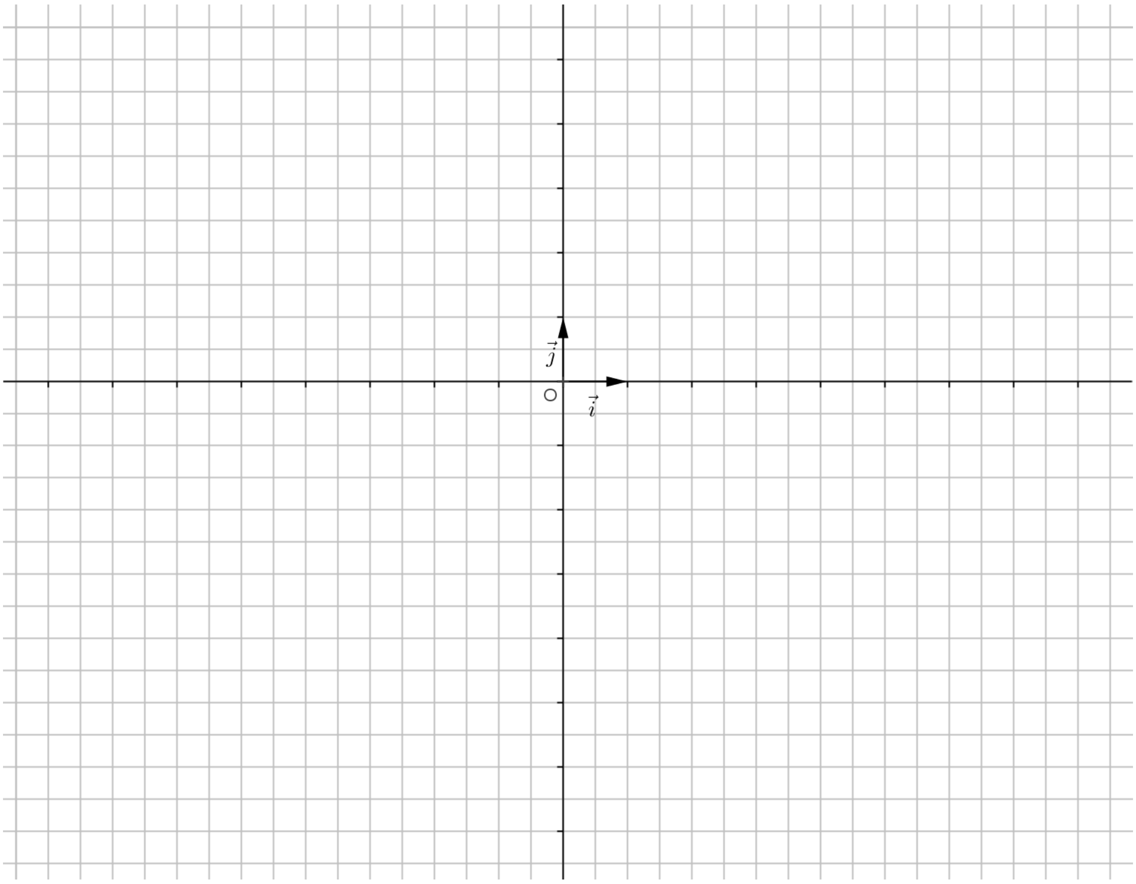
- Si oui, donner la (les) valeur(s) x possible(s) entrée(s) par l'utilisateur.
- Si non, justifier votre réponse.

3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x + 2| - 4$.

a. Déterminer une expression de f sans utiliser de valeurs absolues.

b. Représenter la courbe représentative Cf de la fonction f dans le repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ ci-dessous.

c. Résoudre graphiquement les équations $f(x) = -1$ et $f(x) = -5$.
On laissera les traits de lecture visibles sur le graphique.



Exercice 3	*9 points*

Une roue de loterie est partagée en deux secteurs verts, cinq secteurs blancs et n secteurs rouges (avec n entier naturel non nul).
Après avoir misé 10 €, un joueur fait tourner la roue devant un repère fixe.

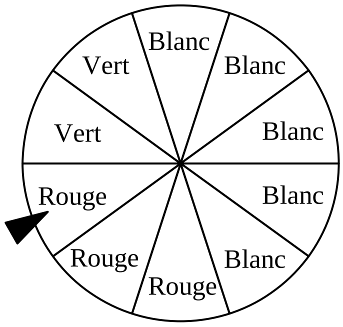
Chaque secteur a la même probabilité de s'arrêter devant ce repère.

- si le repère est sur un secteur vert, le joueur reçoit 40 € ;
- si le repère est sur un secteur blanc, le joueur reçoit 10 € (ce qui lui permet de rembourser sa mise) ;
- si le repère est sur un secteur rouge, le joueur ne reçoit rien et perd donc sa mise.

On note G la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur en tenant compte de la mise de départ.

Partie A

Dans cette partie, on considère que $n = 3$.
Autrement dit, la roue est comme ci-contre.



1. Déterminer la loi de probabilité de G .

2. Calculer l'espérance $E(G)$.

3. a. Fabrice refuse de jouer : il a bien trop peur de perdre son argent ! Qu'en pensez-vous ?

b. Avant de jouer, Charlotte préfère d'abord simuler un grand nombre de telles parties avec un tableur.
A la fin d'une simulation de 500 parties, le gain total affiché par le tableur est de 950 €.
D'après vous, Charlotte a-t-elle été plutôt chanceuse ou non durant cette simulation ?

Partie B

Dans cette partie, on étudie le cas général avec n entier naturel non nul quelconque.

1. Déterminer, en fonction de n, la loi de probabilité de G.

2. Montrer que $E(G) = \dfrac{60 - 10n}{7 + n}$.

3. L'organisateur de la loterie rentre dans ses frais si $E(G) \leq -2$.
Déterminer le nombre minimum de cases rouges qu'il doit prévoir pour ne pas perdre d'argent.

Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Exercice 4	*12 points*

Les cinq questions de cet exercice peuvent être traitées indépendamment.

On considère la fonction $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

1. ***Ensemble de définition***

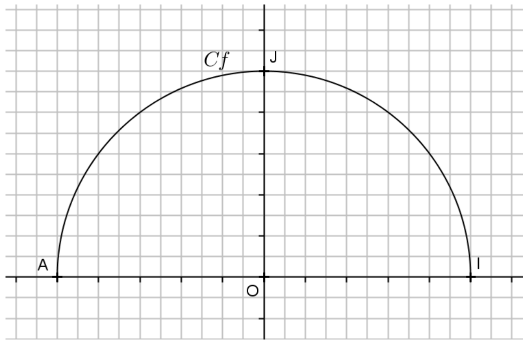
a. Etablir le tableau de signe de l'expression $(1 - x)(1 + x)$.

b. Justifier que la fonction f est définie sur $[-1 ; 1]$.

2. ***Etude des variations de la fonction f***

Déterminer les variations de la fonction f sur $[-1 ; 1]$.
On pourra présenter cette étude sous forme de tableaux de variation successifs.

3. ***Représentation graphique de la fonction f***



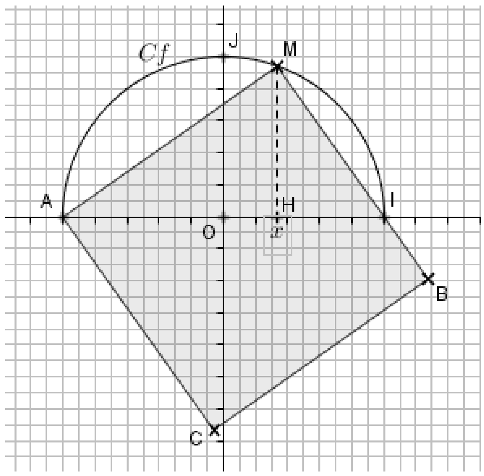
On note Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; I, J) ci-contre.

a. On considère un point M d'abscisse x sur la courbe Cf.
Préciser les coordonnées du point M en fonction de x.
En déduire que OM = 1.

On vient ainsi de démontrer que la courbe Cf, tracée ci-contre, est en fait un demi-cercle de centre O *et de rayon* 1.

b. Construire précisément, sur le graphique ci-dessus, le point T d'abscisse $\frac{\sqrt{3}}{2}$. *On justifiera brièvement la construction sur la copie.*

4. ***Etude expérimentale de l'aire du carré AMBC selon les valeurs de x***



On considère le point A de coordonnées $(-1 ; 0)$ et un point M quelconque sur la courbe C*f*, d'abscisse x. A partir des points A et M, on construit dans le sens indirect le carré AMBC.

On réalise comme ci-contre une figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
En déplaçant le point M, on obtient le tableau de valeurs ci-dessous donnant l'aire du carré AMBC pour des abscisses x du point M.

Abscisse x du point M	–1	–0,8	–0,6	–0,4	–0,2	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
Aire du carré AMBC	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2	2,4	2,8	3,2	3,6	4

Conjecturer l'expression de l'aire $A(x)$ du carré AMBC en fonction de l'abscisse x du point M.

Dans cette question, toute trace de recherche basée sur le relevé de valeurs ci-dessus, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

5. ***Détermination algébrique du réel x pour que l'aire du carré soit égale à l'aire du demi-disque.***

On appelle H le point de l'axe des abscisses de même abscisse x que le point M.

a. Exprimer les longueurs AH et HM en fonction de x.

b. Justifier que $\text{AM} = \sqrt{2 + 2x}$.

c. En déduire l'expression de l'aire $A(x)$ du carré AMBC en fonction de l'abscisse x du point M.

d. L'aire du carré AMBC peut-elle être égale à l'aire du demi-disque de diamètre [AI] ? Si oui, déterminer l'abscisse x du point M correspondant.