Correction DM
De la suite dans les idées !

1. Pour la suite $(u_n) : \begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 2u_n - 1, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

a. $u_1 = 2u_0 - 1 = -1 \qquad u_2 = 2u_1 - 1 = -3 \qquad u_3 = \ldots = -7 \qquad u_4 = \ldots = -15 \qquad u_5 = \ldots = -31$

b. L'idée est de partir de l'expression de u_{n+4} en fonction de u_{n+3} et de remonter peit à petit jusqu'à u_n.

$$\begin{aligned} u_{n+4} &= 2u_{n+3} - 1 \\ &= 2(2u_{n+2} - 1) - 1 = 4u_{n+2} - 3 \\ &= 4(2u_{n+1} - 1) - 3 = 8u_{n+1} - 7 \\ &= 8(2u_n - 1) - 7 = 16u_n - 15 \end{aligned}$$

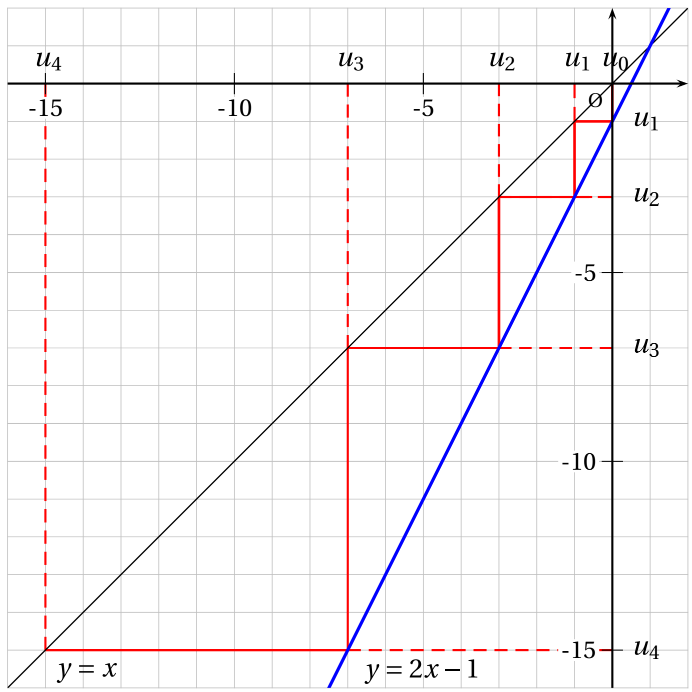
Ainsi $\boxed{u_{n+4} = 16u_n - 9}$

c. Ainsi $u_8 = 16u_4 - 9 = \ldots = -255$
$u_{12} = 16u_8 - 15 = \ldots = -4\,095$
$u_{16} = 16u_{12} - 15 = \ldots = -65\,535$
Et $u_{20} = 16u_{16} - 15 = \ldots = -1\,048\,575$

d. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 2x - 1$$

e.



f. La suite (u_n) semble strictement décroissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} = -\infty$

2. Pour la suite $v_n = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{8}{3}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

a. $v_0 = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^0 + \frac{8}{3} = 2 + \frac{8}{3} = \frac{14}{3} \simeq 4.66667$

$v_1 = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \frac{8}{3} = \frac{10}{3} \simeq 3.33333$

$v_2 = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{8}{3} = \frac{26}{9} \simeq 2.88889$

$v_3 = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{8}{3} = \frac{74}{27} \simeq 2.74074$

$v_4 = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^4 + \frac{8}{3} = \frac{218}{81} \simeq 2.69136$

b. A 10^{-8} près pour les distinguer :

$v_{17} = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{17} + \frac{8}{3} \simeq 2.66666668$

$v_{100} = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{100} + \frac{8}{3} \simeq 2.66666667$

c. Pour cet algorithme, j'ai déclaré v comme une liste de nombre (autrement dit, une suite !).
J'ai perfectionné l'affichage afin de savoir à quel terme correspondent les valeurs affichées.

```
VARIABLES
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  v EST_DU_TYPE LISTE
  k EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE n
  POUR k ALLANT_DE 0 A n
    DEBUT_POUR
    v[k] PREND_LA_VALEUR 2*pow(1/3,k)+8/3
    AFFICHER "v_"
    AFFICHER k
    AFFICHER "="
    AFFICHER v[k]
    FIN_POUR
FIN_ALGORITHME
```

d. La suite (v_n) semble strictement décroissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} = \frac{8}{3}$

3. Pour la suite $(w_n) : \begin{cases} w_0 = -\dfrac{1}{2} \\ w_n = 4 - w_{n-1}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

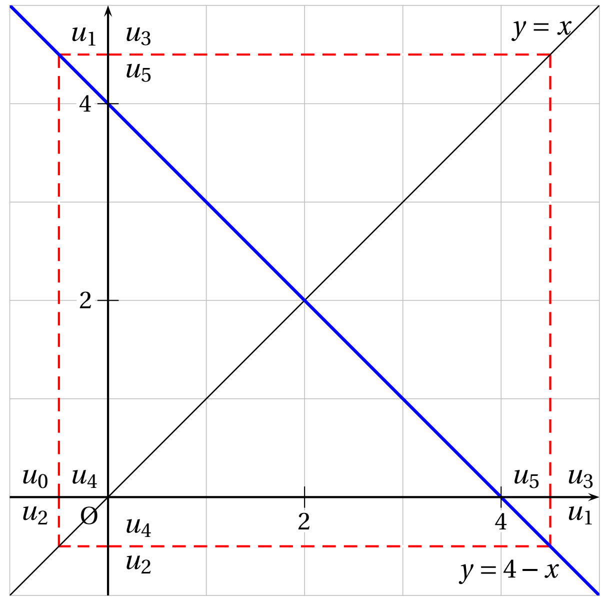
a. $w_1 = 4 - w_0 = 4 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{9}{2}$ $\qquad w_2 = 4 - w_1 = 4 - \dfrac{9}{2} = -\dfrac{1}{2}$ $\qquad w_3 = \ldots = \dfrac{9}{2}$ $\qquad w_4 = \ldots = -\dfrac{1}{2}$ $\qquad w_5 = \ldots = \dfrac{9}{2}$

b.

```
VARIABLES
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  w EST_DU_TYPE NOMBRE
  k EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE n
  w PREND_LA_VALEUR -0.5
  POUR k ALLANT_DE 1 A n
    DEBUT_POUR
    w PREND_LA_VALEUR 4-w
    FIN_POUR
  AFFICHER "Le terme de rang "
  AFFICHER n
  AFFICHER " de la suite w est "
  AFFICHER w
FIN_ALGORITHME
```

c. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4 - x$

d.



e. w_n oscille entre deux valeurs fixes, donc (w_n) n'a pas de limite.

f. Si n est pair, $w_n = -0.5$, sinon $w_n = 4.5$.

4. Pour la suite $s_n = 5 - 2n, \qquad n \in \mathbb{N}^*$

a. $s_0 = 5 - 2 \times 0 = 5$ $\qquad s_1 = 5 - 2 \times 1 = 3$ $\qquad s_2 = 5 - 2 \times 2 = 1$ $\qquad s_3 = \ldots = -1$ $\qquad s_4 = \ldots = -3$

b. $s_{17} = 5 - 2 \times 17 = -29$ $\qquad s_{100} = 5 - 2 \times 100 = -195$

c. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5 - 2x$

d. $s_{n+1} - s_n = 5 - 2(n+1) - (5 - 2n) = 5 - 2n - 2 - 5 + 2n = -2 < 0$.
Donc la suite (s_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$.

e. On vient de montrer que $s_{n+1} - s_n = -2$ donc on a $s_{n+1} = s_n - 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(s_n) est une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $s_0 = 5$

f. g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x - 2$

h. (s_n) semble diverger vers $-\infty$.

g.