

DEVOIR MAISON 8 : DE LA SUITE DANS LES IDÉES !

On considère les suites $(u_n)_{n \geq 0}$, $(v_n)_{n \geq 0}$, $(w_n)_{n \geq 0}$ et $(s_n)_{n \geq 1}$ définies par :

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 2u_n - 1, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (w_n) : \begin{cases} w_0 = -\frac{1}{2} \\ w_n = 4 - w_{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

$$v_n = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{8}{3}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad s_n = 5 - 2n, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

1. Pour la suite u

- a. Calculer les 5 premiers termes de la suite (u_n) .
- b. Exprimer u_{n+4} en fonction de u_n .
- c. En déduire u_8 ; u_{12} ; u_{16} et u_{20} .
- d. Déterminer la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$
- e. Représenter, à l'aide de la fonction f et de la droite $\mathcal{D} : y = x$, les premiers termes de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) d'unité graphique 1 cm.
- f. Conjecturer graphiquement le sens de variation et la limite de la suite (u_n) .

2. Pour la suite v

- a. Calculer les 5 premiers termes de la suite (v_n) à 10^{-5} près.
- b. Calculer v_{17} et v_{100} à 10^{-5} près.
- c. Programmer sur Algobox un algorithme, qui affiche en sortie tous les termes de la suite (v_n) jusqu'au terme de rang n , où n est un entier choisi par l'utilisateur.
- d. Conjecturer alors le sens de variation et la limite de (v_n) .

3. Pour la suite w

- a. Calculer les 5 premiers termes de la suite (w_n) .
- b. Programmer sur Algobox un algorithme, qui affiche en sortie le terme d'indice n de la suite (w_n) , où n est un entier choisi par l'utilisateur.
- c. Déterminer la fonction f telle que $w_{n+1} = f(w_n)$.
- d. Représenter, à l'aide de la fonction f et de la droite $\mathcal{D} : y = x$, les premiers termes de la suite (w_n) sur l'axe des abscisses d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) d'unité graphique 1 cm.
- e. Conjecturer graphiquement la limite de (w_n) .
- f. Conjecturer une formule donnant w_n en fonction de n ; et démontrer votre conjecture.

4. Pour la suite s

- a. Calculer les 5 premiers termes de la suite (s_n) .
- b. Calculer s_{17} et s_{100} à 10^{-3} près.
- c. Déterminer la fonction f telle que $s_n = f(n)$.
- d. Déterminer le sens de variation de la suite s .
- e. Conjecturer une formule donnant le terme de rang s_{n+1} en fonction de s_n et démontrer votre conjecture.
- f. Déterminer la fonction g telle que $s_{n+1} = g(s_n)$.
- g. Représenter, à l'aide de la fonction f et de la droite $\mathcal{D} : y = x$, les premiers termes de la suite (s_n) sur l'axe des abscisses d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) d'unité graphique 1 cm.
- h. Conjecturer graphiquement la limite de la suite (s_n) .