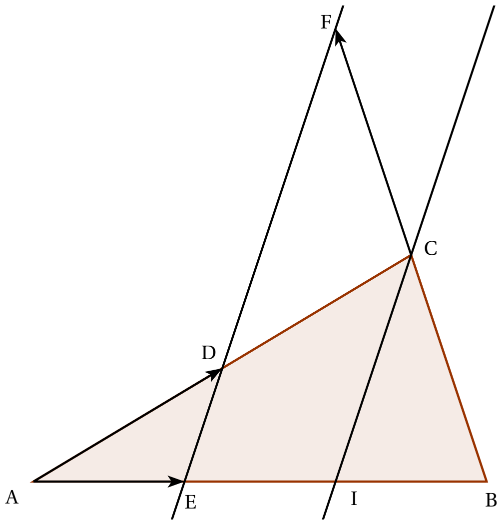
Devoir Maison 6 : Correction de l'exercice 17 de la fiche

Exercice 19 :



1. **a. Décomposer $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DF}$ dans la base $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$.**

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DE} &= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE}\\ &= -\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\\ &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DF} &= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}\\ &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC}\\ &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{AC}\\ &= -\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

b. Démontrer que D, E et F sont alignés.
Il est clair que $\overrightarrow{DF} = -3\overrightarrow{DE}$.
Donc les vecteurs $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires.
On en déduit que les droites (DE) et (DF) sont parallèles. Comme elles ont un point commun (E), elles sont confondues.
Ainsi les points D, E et F sont alignés.

2. **La parallèle à (DE) passant par C coupe [AB] en un point I.**

a. Démontrer que E est le milieu de [AI].
Dans le triangle ACI on a D milieu de [AC] et (CI)//(DE). D'après le théorème des milieux, on a donc que E est le milieu de [AI].

b. En déduire que I est le milieu de [EB].
On a EI = AE car I est le milieu de [AB]. De plus on sait que $AE = \frac{1}{3}AB$.
Donc $IB = AB - AE - EI = \frac{1}{3}AB$. Ainsi $IB = \frac{1}{3}AB = EI$ et I est le milieu de [EB].

c. Démontrer alors que la droite (CI) est parallèle à la droite (FD). Conclure. Dans le triangle BEF on a I milieu de [EB] et BF = 2BC donc C est le milieu de [BF].
D'après le théorème des milieux, on a alors (CI)//(EF).
Ainsi, (CI)//(DE) et (CI)//(EF), donc les droites (DE) et (EF) sont parallèles.
Comme elles ont un point commun (E), elles sont confondues.
On en déduit que D, E et F sont sur une même droite, ie qu'ils sont alignés.

Exercice 26 : A(3;4), B(1;−1) et C(6;−2).

1. **Déterminer une équation cartésienne de la droite** (AB)**.**

   La droite (AB) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1-3\\-1-4\end{pmatrix} \iff \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\-5\end{pmatrix}$ ou encore par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$

   Donc l'équation de (AB) est de la forme (AB) : $5x-2y=c$ où $c\in\mathbb{R}$.
   On sait que A ∈ (AB) donc ses coordonnées vérifient l'équation de (AB).
   Comme $5x_A-2y_A=5\times3-2\times4=15-8=7$, on en déduit $c=7$. Ainsi $\boxed{(AB): 5x-2y=7}$
   Vérifions que B ∈ (AB) *:* $5x_B-2y_B=5\times1-2\times(-1)=5+2=7$. *On ne s'est pas trompé !*

2. **Déterminer une équation cartésienne de la droite** d **passant par le milieu** I **de** [AC] **et parallèle à** (AB)**.**

   $d//(AB)$ donc on a $d: 5x-2y=c$ où $c\in\mathbb{R}$
   De plus, I ∈ d donc ses coordonnées vérifient l'équation de d.
   Or $x_I=\dfrac{x_A+x_C}{2}=\dfrac{9}{2}$ et $y_I=\dfrac{y_A+y_C}{2}=1$. Donc $\boxed{I\left(\dfrac{9}{2};1\right)}$ Et $5\times\dfrac{9}{2}-2\times1=\dfrac{45}{2}-2=\dfrac{41}{2}$

   Ainsi $\boxed{d: 5x-2y=\dfrac{41}{2}}$.

3. Δ est la droite d'équation $-16x+y=-98$

   a. **Prouver que** Δ **et** (AB) **sont sécantes en** D **de coordonnées à déterminer.**

   $\begin{cases}5x-2y=7\\-16x+y=-98\end{cases}$ $5\times1-(-16)\times(-2)\neq0$ donc les droites (AB) et Δ sont sécantes en un point D et le système admet un unique couple solution.

   $$\begin{cases}5x-2y=7\\-16x+y=-98\end{cases} \overset{2L_2}{\iff} \begin{cases}5x-2y=7\\-32x+2y=-196\end{cases}$$
   $$\overset{L_1+L_2}{\iff} \begin{cases}5x-2y=7\\-27x=-189\end{cases} \iff \begin{cases}5x-2y=7\\x=\dfrac{-189}{-27}\end{cases}$$
   $$\iff \begin{cases}x=7\\5\times7-2y=7\end{cases} \iff \begin{cases}x=7\\35-7=2y\end{cases} \iff \begin{cases}x=7\\y=\dfrac{28}{2}=14\end{cases}$$
   Donc $\boxed{D(7;14)}$

   Vérification : $5\times7-2\times14=35-28=7$ *donc* D ∈ (AB)
   Et $-16\times7+14=-112+14=-98$ *donc* D ∈ Δ. *On ne s'est pas trompé !*

   b. **Montrer que le milieu** J **de** [DC] **est un point de** d **de deux manières différentes.**

   Calculons les coordonnées de J : $x_J=\dfrac{7+6}{2}=\dfrac{13}{2}$ et $y_J=\dfrac{14-2}{2}=6$ donc $\boxed{J\left(\dfrac{13}{2};6\right)}$

   Or $5\times\dfrac{13}{2}-2\times6=\dfrac{65}{2}-\dfrac{24}{2}=\dfrac{41}{2}$. Donc J ∈ d

   Autre méthode : On sait qu'un vecteur directeur de d est $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ et que I ∈ d.

   Or $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}\dfrac{13}{2}-\dfrac{9}{2}\\6-1\end{pmatrix} \iff \overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ Donc $\overrightarrow{IJ}$ dirige d. Comme I ∈ d on a aussi J ∈ d.