DEVOIR MAISON 5 : CORRECTION

Exercice 1 : On appelle x et y les longueurs des deux côtés du triangle rectangle, adjacents à l'angle droit. On sait que x et y sont strictement positifs et qu'ils vérifient le système :

$$(S) : \begin{cases} x^2+y^2 = 72.5^2 \\ \dfrac{xy}{2} = 429 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+y^2 = 5256.25 \\ xy = 858 \end{cases} \underset{(y\neq 0)}{\iff} \begin{cases} x^2+y^2 = 5256.25 \\ x = \dfrac{858}{y} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \dfrac{736164}{y^2}+y^2 = 5256.25 \\ x = \dfrac{858}{y} \end{cases} \underset{(y^2\neq 0)}{\iff} \begin{cases} 736164+y^4 = 5256.25y^2 \\ x = \dfrac{858}{y} \end{cases} \iff \begin{cases} y^4-5256.25y^2+736164 = 0 \\ x = \dfrac{858}{y} \end{cases}$$

La première équation est une équation bicarré. On pose alors $Y = y^2$ et on est ramené à résoudre :

$$Y^2 - 5256.25Y + 736164 = 0$$

On trouve $\Delta = ... = (4968.25)^2$. Donc les solutions sont $Y_1 = \dfrac{5256.25-4968.25}{2} = 144$ et $Y_2 = 5112.25$.
Or $Y = y^2$. On cherche donc les solutions y des équations $y^2 = 144$ et $y^2 = 5112.25$.
Or $y^2 = 144 \iff y = 12$ ou $y = -12$ et $y^2 = 5112.25 \iff y = 71.5$ ou $y = -71.5$.
Comme $y > 0$, on a forcément $y_1 = 12$ ou $y_2 = 71.5$.
De plus, $x = \dfrac{858}{y}$ donc on a $x_1 = 71.5$ et $x_2 = 12$ (logique car les rôles de x et y sont symétriques).
Ainsi, le périmètre du triangle rectangle est $P = 12+71.5+72.5 = 156\,\text{m}$.

Exercice 2 : **La puissance de l'infini ...**

1. **a.** $10a = 9,\underline{9} = 9+0,\underline{9} = 9+a$

   b. On résout l'équation ci-dessus. On a : $10a = 9+a \iff 9a = 9 \iff a = 1$.
   Ainsi $0,\underline{9} = 1$.

2. **a.** $\Phi^2 = \left(\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}}\right)^2 = 1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}} = 1+\Phi$

   b. On sait que $\Phi^2 = \Phi+1 \iff \Phi^2-\Phi-1 = 0$.
   On trouve $\Delta = (-1)^2-4\times 1\times(-1) = 5$ Donc les solutions sont $\Phi_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\Phi_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.
   Il est clair que $\Phi > 0$, ainsi $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

   c. On sait que $\Phi^2 = \Phi+1 \iff \Phi = 1+\dfrac{1}{\Phi}$ car $\Phi \neq 0$.

   d. Puisque $\Phi = 1+\dfrac{1}{\Phi}$ en remplaçant successivement Φ par cette expression, on peut aussi dire que :

$$\Phi = 1+\frac{1}{\Phi} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\Phi}} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\Phi}}} = \ldots$$

<u>Exercice 3</u> : Un peu de probabilité ...

1. On sait que $p \in]0;1[$ et $p + p^2 + 0.04 = 1 \iff p^2 + p - 0.96 = 0$
   Or $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-0.96) = 1 + 3.84 = 4.84 = 2.2^2$
   Donc les solutions de cette équation sont $p_1 = \dfrac{-1-2.2}{2} < 0$ et $p_2 = \dfrac{-1+2.2}{2} = 0.6$.
   On a alors $p = 0.6$. On vérifie : $p + p^2 + 0.04 = 0.6 + 0.36 + 0.04 = 1$.
2. Aujourd'hui, Croquette organise une séance d'entraînement de 4 sauts consécutifs entre ces 3 souris.
   On appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès d'Ignatz.
   Quelle est la probabilité que la souris de type Ignatz en remporte au moins un ?
   Expliquer rigoureusement Croquette répète quatre fois, identiquement et de manière indépendante, l'épreuve de Bernoulli de succès « Ignatz gagne un saut », de probabilité $p = 0.6$.
   X comptant le nombre de Succès sur les quatre sauts, on peut dire que X suit la loi binomiale $B(4; 0.6)$.
   Ainsi on cherche $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (0.4)^4 = 1 - 0.0256 = 0.9744$

<u>Exercice 3</u> : Un peu de probabilité ...

1. On sait que $p \in]0;1[$ et $p + p^2 + 0.04 = 1 \iff p^2 + p - 0.96 = 0$
   Or $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-0.96) = 1 + 3.84 = 4.84 = 2.2^2$
   Donc les solutions de cette équation sont $p_1 = \dfrac{-1-2.2}{2} < 0$ et $p_2 = \dfrac{-1+2.2}{2} = 0.6$.
   On a alors $p = 0.6$. On vérifie : $p + p^2 + 0.04 = 0.6 + 0.36 + 0.04 = 1$.
2. Aujourd'hui, Croquette organise une séance d'entraînement de 4 sauts consécutifs entre ces 3 souris.
   On appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès d'Ignatz.
   Quelle est la probabilité que la souris de type Ignatz en remporte au moins un ?
   Expliquer rigoureusement Croquette répète quatre fois, identiquement et de manière indépendante, l'épreuve de Bernoulli de succès « Ignatz gagne un saut », de probabilité $p = 0.6$.
   X comptant le nombre de Succès sur les quatre sauts, on peut dire que X suit la loi binomiale $B(4; 0.6)$.
   Ainsi on cherche $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (0.4)^4 = 1 - 0.0256 = 0.9744$

<u>Exercice 3</u> : Un peu de probabilité ...

1. On sait que $p \in]0;1[$ et $p + p^2 + 0.04 = 1 \iff p^2 + p - 0.96 = 0$
   Or $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-0.96) = 1 + 3.84 = 4.84 = 2.2^2$
   Donc les solutions de cette équation sont $p_1 = \dfrac{-1-2.2}{2} < 0$ et $p_2 = \dfrac{-1+2.2}{2} = 0.6$.
   On a alors $p = 0.6$. On vérifie : $p + p^2 + 0.04 = 0.6 + 0.36 + 0.04 = 1$.
2. Aujourd'hui, Croquette organise une séance d'entraînement de 4 sauts consécutifs entre ces 3 souris.
   On appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès d'Ignatz.
   Quelle est la probabilité que la souris de type Ignatz en remporte au moins un ?
   Expliquer rigoureusement Croquette répète quatre fois, identiquement et de manière indépendante, l'épreuve de Bernoulli de succès « Ignatz gagne un saut », de probabilité $p = 0.6$.
   X comptant le nombre de Succès sur les quatre sauts, on peut dire que X suit la loi binomiale $B(4; 0.6)$.
   Ainsi on cherche $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (0.4)^4 = 1 - 0.0256 = 0.9744$