DEVOIR MAISON 4 : CORRECTION

Exercice 2 : **Méthode du poolage**

Partie A : Etude d'un cas particulier.

On prend N = 60 et on fait 20 groupes de 3, que l'on numérote de 1 à 20.
Pour chaque groupe i (i entier de 1 à 20), on note H_i le mélange des prélèvements des trois individus du groupe.
Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de groupes pour lesquels le test de H_i est négatif.
Soit T la variable aléatoire qui correspond au nombre total de tests effectués.

1. Chaque groupe H_i contient les prélèvements de 3 individus.
Le test du groupe H_i est négatif si et seulement si chaque individu du groupe est sain.
On peut construire l'arbre de probabilité de la situation, mais il est simple de voir que

$$P(H_i \text{ négatif}) = P(\text{les trois individus sont sains}) = (1-p)^3$$

2. Regarder si le test d'un groupe H_i est négatif ou non constitue une épreuve de Bernoulli.
On appelle Succès le fait que le test soit négatif. La probabilité d'un Succès est alors de $(1-p)^3$ d'après la question précédente.
Regarder les résultats des tests sur l'ensemble des groupes H_i constitue un schéma de Bernoulli, car on répète l'épreuve de Bernoulli précédente de manière identique et indépendante, et ce 20 fois.
X comptant le nombre de groupes pour lesquels le test est négatif, elle compte le nombre de succès de l'expérience. On a donc $X \hookrightarrow B\left(20,(1-p)^3\right)$. On en déduit $E(X) = 20(1-p)^3$.

3. T est la variable qui compte le nombre de tests effectués. On effectue
- un test par groupe : il y en a 20
- Puis 1 test pour chaque personne des groupes au test positif : il y a $(20-X)$ groupe contaminé et chacun contient 3 personnes.

Ainsi $T = 20+3(20-X) = 80-3X$. On en déduit $E(T) = 80-3E(X) = 80-60(1-p)^3$.

4. **a.** $E(T) \leq 60 \iff 80-60(1-p)^3 \leq 60 \iff 20-60(1-p)^3 \leq 0 \overset{\div 60}{\iff} \frac{1}{3}-(1-p)^3 \leq 0$

b. Algorithme de f :

$$x \longmapsto 1-x \longmapsto (1-x)^3 \longmapsto -(1-x)^3 \longmapsto \frac{1}{3}-(1-x)^3$$

x	0	α	1
Variations de $1-x$	1		0
Variations de $(1-x)^3$	$1^3=1$		$0^3=0$
Variations de $-(1-x)^3$	-1		0
Variations de $\frac{1}{3}-(1-x)^3$	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$

On connait depuis la seconde les variations d'une fonction affine.

La fonction cube est strictement croissante sur $[0;1]$ donc elle ne change pas les variations.

Multiplier une fonction par un nombre négatif change toutes ses variations.

Ajouter un nombre à une fonction ne change pas ses variations.

c. $0 \in \left[-\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right[$, donc d'après le tableau de variations de g, il est clair que la fonction passe par 0.
Grâce à un tableau de valeurs, on trouve $\alpha \simeq 0.3$

d. La méthode de poolage est rentable si et seulement si $g(p) \leq 0$, donc si $p \leq 0.3$.

Partie B : Autre cas particulier

On a toujours $N = 60$, mais cette fois, on fait 15 groupes de 4, que l'on numérote de 1 à 15.

- La probabilité que le test d'un groupe H_i soit négatif est de $(1-p)^4$.
- On appelle encore X la variable aléatoire qui compte le nombre de groupe ayant un test négatif.
  Alors $X \hookrightarrow B\big((15, (1-p)^4\big)$ et $E(X) = 15(1-p)^4$.
- On appelle T la variable aléatoire égale au nombre de test à effectuer.
  On a $T = 15 + 4(15 - X) = 75 - 4X$ et $E(T) = 75 - 60(1-p)^4$.
- Dans ce cas $E(T) \leq 60 \iff 75 - 60(1-p)^4 \leq 60 \iff 15 - 60(1-p)^4 \leq 0 \iff \frac{1}{4} - (1-p)^4 \leq 0$
- On pose g la fonction définie sur $[0;1]$ par $g(x) = \frac{1}{4} - (1-p)^4$. On a le tableau suivant :

x	0	α	1
Variations de $1-x$	1		0
Variations de $(1-x)^4$	$1^4 = 1$		$0^4 = 0$
Variations de $-(1-x)^4$	-1		0
Variations de $\frac{1}{4}-(1-x)^4$	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{1}{4}$

On en déduit que la fonction g passe par 0. On trouve encore une fois $\alpha \simeq 0.3$.

Conclusion : La méthode du poolage est encore rentable pour $p \leq 0.3$.

Partie C : Un problème d'optimisation

1. $X \hookrightarrow B\left(\frac{N}{n}; (1-p)^n\right)$ donc $E(X) = \frac{N}{n} \times (1-p)^n$

2. On a $T = \frac{N}{n} + n\left(\frac{N}{n} - X\right) = \frac{N}{n} + N - nX$ Donc $T = N\left(1 + \frac{1}{n}\right) - nX$.

Donc $E(T) = N\left(1+\frac{1}{n}\right) - nE(X) = N\left(1+\frac{1}{n}\right) - n \times \frac{N}{n} \times (1-p)^n = N\left(1+\frac{1}{n}\right) - N \times (1-p)^n$

Donc $E(T) = N\left(1 + \frac{1}{n} - (1-p)^n\right)$

3. N étant fixé et **positif**, $E(T)$ est minimale si et seulement si $1 + \frac{1}{n} - (1-p)^n$ est minimale.

4. et 5.

- $p = 0.1$: On rentre dans la calculatrice la fonction g définie sur les entiers par $g(n) = 1 + \frac{1}{n} - (1-0.1)^n$, ie $g(n) = 1 + \frac{1}{n} - 0.9^n$ et on cherche la valeur entière de n pour laquelle $g(n)$ est minimal. On trouve $n = 4$.
  Dans ce cas, $E(T) = N\left(1 + \frac{1}{4} - (1-0.1)^4\right) = N\left(\frac{5}{4} - 0.9^4\right) \simeq 0.59N < N$.
  Donc le poolage est rentable.

- $p = 0.01$: On rentre dans la calculatrice la fonction g définie sur les entiers par $g(n) = 1 + \frac{1}{n} - 0.99^n$ et on cherche la valeur entière de n pour laquelle $g(n)$ est minimal. On trouve $n = 11$.
  Dans ce cas, $E(T) = N\left(\frac{12}{11} - 0.99^{11}\right) \simeq 0.20N < N$.
  Donc le poolage est rentable.

- $p = 0.001$: On rentre dans la calculatrice la fonction g définie sur les entiers par $g(n) = 1 + \frac{1}{n} - 0.999^n$ et on cherche la valeur entière de n pour laquelle $g(n)$ est minimal. On trouve $n = 32$.
  Dans ce cas, $E(T) = N\left(\frac{33}{32} - 0.999^{32}\right) \simeq 0.06N < N$.
  Donc le poolage est rentable.