Devoir Maison 3bis : Correction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\sqrt{|x^2-6x+10|}$

1. Variations de f :

a. On résout l'équation $x^2-6x+10=10 \iff x^2-6x=0 \iff x(x-6)=0 \iff x=0$ ou $x=6$

Donc $\alpha=\dfrac{0+6}{2}=3$. De plus $\beta=f(\alpha)=3^2-6\times3+10=1$.

Au final on a $x^2-6x+10=(x-3)^2+1$.

Il est clair que cette expression est toujours supérieure ou égale à 1 donc strictement positive.

b. On en déduit que $|x^2-6x+10|=x^2-6x+10$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. Donc

$$f(x)=\sqrt{x^2-6x+10} \quad \text{ou encore} \quad f(x)=\sqrt{(x-3)^2+1}, \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

c.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
Variations de $(x-3)^2+1$	$\searrow$	1	$\nearrow$
Variations de $f(x)=\sqrt{(x-3)^2+1}$	$\searrow$	$\sqrt{1}=1$	$\nearrow$

Algorithme de f :

$$x \longmapsto (x-3)^2+1 \longmapsto \sqrt{(x-3)^2+1}$$

On connait depuis la seconde les variations d'une fonction trinôme donnée sous sa forme canonique.

La fonction racine carré est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
Donc elle ne change pas les variations d'une fonction positive.

d. La fonction f admet pour minimum 1 atteint en $x=3$ et pas de maximum.

2. Première propriété de la courbe représentative de f : Soit $h\in\mathbb{R}$.

a. On utilise la forme canonique du trinôme, plus simple pour ces calculs. On a $f(x)=\sqrt{(x-3)^2+1}$, donc :

$$f(3-h)=\sqrt{\left((3-h)-3\right)^2+1}=\sqrt{(-h)^2+1}=\sqrt{h^2+1} \qquad f(3+h)=\sqrt{(3+h-3)^2+1}=\sqrt{h^2+1}$$

Donc $\forall h\in\mathbb{R}$ on a $f(3-h)=f(3+h)$.

b. Les points A et B appartiennent à $\mathscr{C}_f$ par définition de leur ordonnée, et d'après 2a), on sait que ces ordonnées sont égales. Ainsi, ces points sont symétriques par rapport à la droite d'équation $x=3$.

c. Ceci étant vrai pour tout $h\in\mathbb{R}$, on peut en déduire que la courbe $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x=3$. Lorsque h parcourt $\mathbb{R}$, on peut donc en déduire que les points donnés sont symétriques par rapport à la droite d'équation $x=3$.

3. Comportement à l'infini de f :

a. M = 10.

i. $f(x)=10 \iff \sqrt{(x-3)^2+1}=10 \iff (x-3)^2+1=100$ car $(x-3)^2+1$ est positif

$$\begin{aligned}&\iff (x-3)^2=99 &&\iff x-3=\sqrt{99} \text{ ou } x-3=-\sqrt{99}\\ & &&\iff x=3+\sqrt{99} \text{ ou } x=3-\sqrt{99}\end{aligned}$$

Comme $3-\sqrt{99}<0$ et qu'on nous demande les solutions positives, on a finalement $S=\left\{3+\sqrt{99}\right\}$.

ii.

x	$-\infty$	$3-\sqrt{99}$	0	3	$3+\sqrt{99}$	$+\infty$
Variations de f	$\searrow$	10	$\sqrt{10}$	1	10	$\nearrow$

D'après le tableau de variations de f, sur les positifs on a :

$$f(x) \geq 10 \iff x \geq 3+\sqrt{99}$$

Donc $\mathrm{S} = \left[3+\sqrt{99};+\infty\right[$

iii. Toujours d'après ce tableau, on voit que pour tout $x \geq 3+\sqrt{99}$ on a $f(x) \geq 10$.
Donc $\mathrm{X} = 3+\sqrt{99}$ convient.
En fait, c'est le premier qui convient, mais l'affirmation est encore vraie pour n'importe quel X plus grand que $3+\sqrt{99}$. Par exemple $\mathrm{X} = 3+\sqrt{100} = 13$.

iv. Pour $\mathrm{M} = 10^5$, on trouve sur les positifs que

$$f(x) = 10^5 \iff x = 3+\sqrt{10^{10}-1}$$

Grâce au tableau, on peut donc dire que les solutions positives de l'équation $f(x) \geq 10^5$ sont les nombres de l'intervalle $\left[3+\sqrt{10^{10}-1};+\infty\right[$.
Il existe donc X tel que pour tout $x \geq \mathrm{X}$ on a $f(x) \geq 10^5$.
Par exemple $\mathrm{X} = 3+\sqrt{10^{10}-1}$ ou encore $\mathrm{X} = 3+\sqrt{10^{10}} = 3+10^5$.

Pour $\mathrm{M} = 10^{37}$, on trouve sur les positifs que

$$f(x) = 10^{37} \iff x = 3+\sqrt{10^{74}-1}$$

Grâce au tableau, on peut donc dire que les solutions positives de l'équation $f(x) \geq 10^{37}$ sont les nombres de l'intervalle $\left[3+\sqrt{10^{74}-1};+\infty\right[$.
Il existe donc X tel que $f(x) \geq 10^{37}$ pour tout $x \geq \mathrm{X}$.
Par exemple $\mathrm{X} = 3+\sqrt{10^{74}-1}$ ou encore $\mathrm{X} = 3+\sqrt{10^{74}} = 3+10^{37}$.

b. Soit $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$

i. D'après le tableau de variations de f, on voit que l'équation $f(x) = \mathrm{M}$ admet
0 solution si $\mathrm{M} < 1$, 1 solution si $\mathrm{M} = 1$, 2 solutions si $\mathrm{M} > 1$.

ii. – Si $\mathrm{M} < 1$: on voit, d'après le tableau de variations de f, que $f(x)$ est toujours supérieur ou égal à M. Donc l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) \geq \mathrm{M}$ est $\mathrm{S} = \mathbb{R}$.
– Si $\mathrm{M} = 1$: on voit, d'après le tableau de variations de f, que $f(x)$ est toujours supérieur ou égal à M. Donc l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) \geq \mathrm{M}$ est encore $\mathrm{S} = \mathbb{R}$.
– Si $\mathrm{M} > 1$: Commençons par résoudre l'équation $f(x) = \mathrm{M}$, comme pour les cas particuliers.
$f(x) = \mathrm{M} \iff \sqrt{(x-3)^2+1} = \mathrm{M} \iff (x-3)^2+1 = \mathrm{M}^2$ car $(x-3)^2+1$ est positif

$$\begin{aligned} \iff (x-3)^2 = \mathrm{M}^2-1 \quad &\iff \quad x-3 = \sqrt{\mathrm{M}^2-1} \quad \text{ou} \quad x-3 = -\sqrt{\mathrm{M}^2-1} \\ &\iff \quad x = 3+\sqrt{\mathrm{M}^2-1} \quad \text{ou} \quad x = 3-\sqrt{\mathrm{M}^2-1} \end{aligned}$$

x	$-\infty$	$3-\sqrt{\mathrm{M}^2-1}$	3	$3+\sqrt{\mathrm{M}^2-1}$	$+\infty$
Variations de f	$\searrow$	M	1	M	$\nearrow$

D'après le tableau, on voit que

$$\begin{aligned} f(x) \geq \mathrm{M} \quad &\iff \quad x \leq 3-\sqrt{\mathrm{M}^2-1} \\ &\text{ou} \quad x \geq 3+\sqrt{\mathrm{M}^2-1} \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions est $\mathrm{S} = \left]-\infty;3-\sqrt{\mathrm{M}^2-1}\right] \cup \left[3+\sqrt{\mathrm{M}^2-1};+\infty\right[$

iii. La phrase « $\forall M \in \mathbb{R}, \exists X \in \mathbb{R}, \forall x \geq X$ on a $f(x) \geq M$ » signifie :

« Pour tout nombre réel M, il existe (au moins) un nombre réel X tel que, pour tout x plus grand que X, on a $f(x)$ supérieur ou égal à M ».

iv. – Si $M < 1$ alors on sait que pour tout nombre x on a $f(x) \geq M$, donc en particulier pour ceux plus grands que 4 (n'importe quelle valeur convient).
Donc par exemple $X = 4$ vérifie l'affirmation « pour tout $x \geq X$, $f(x) \geq M$ »
Puisque qu'on a trouvé un X tel que pour tout $x \geq X$ on a $f(x) \geq M$, il existe au moins un.

– Si $M = 1$, c'est pareil. Par exemple, on peut prendre $X = -52$.
On a bien « pour tout $x \geq -52$, $f(x) \geq 1$ ».
Donc il existe au moins un X qui vérifie l'affirmation.

– Si $M > 1$, alors on sait que si $x \geq 3 + \sqrt{M^2 - 1}$ on a $f(x) \geq M$
Donc si on choisit $X = 3 + M$ (qui est plus grand que $3 + \sqrt{M^2 - 1}$), on a bien que « pour tout $x \geq X$, $f(x) \geq M$ ».
Donc il existe au moins un X qui vérifie l'affirmation.

Dans les trois cas possibles, on a bien trouvé un X vérifiant l'affirmation « pour tout $x \geq X$, $f(x) \geq M$ ».
Donc au final, l'affirmation globale « $\forall M \in \mathbb{R}, \exists X \in \mathbb{R}, \forall x \geq X$ on a $f(x) \geq M$ » est vraie.

v. On peut en déduire que $f(x)$ peut être aussi grand que l'on veut si x est assez grand.
Ainsi $\mathscr{C}_f$ « montera » aussi haut que l'on veut, si l'on regarde assez loin « à droite ».
De plus, grâce à la symétrie, on sait que $\mathscr{C}_f$ « montera » également aussi haut que l'on veut, si l'on regarde assez loin « à gauche ».

vi. On peut rajouter cette information au bout des flèches du tableau, ie en rajoutant le fait que f peut être aussi grand que l'on veut pour x assez grand : on écrira un $+\infty$ sur la ligne de f, sous le $+\infty$ de la ligne des x.

vii. Par symétrie, on sait que f peut être aussi grand que l'on veut pour x assez grand dans les négatifs : on écrira un $+\infty$ sur la ligne de f, sous le $-\infty$ de la ligne des x. Ainsi, on obtient le tableau de variations complets suivants :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Ces $+\infty$ rajoutés ne sont pas des images de f, mais s'appellent des limites. On dit que la limite de la fonction f quand x tend vers $+\infty$ est $+\infty$. On note ceci ainsi $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. On a aussi $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

4. Deuxième propriété de $\mathscr{C}_f$: $g(x) = f(x) - (x - 3)$

a. $g(10) \simeq 0.071068$ $\quad g(10^5) \simeq 0.000005$ $\quad g(10^{37}) \simeq 0$

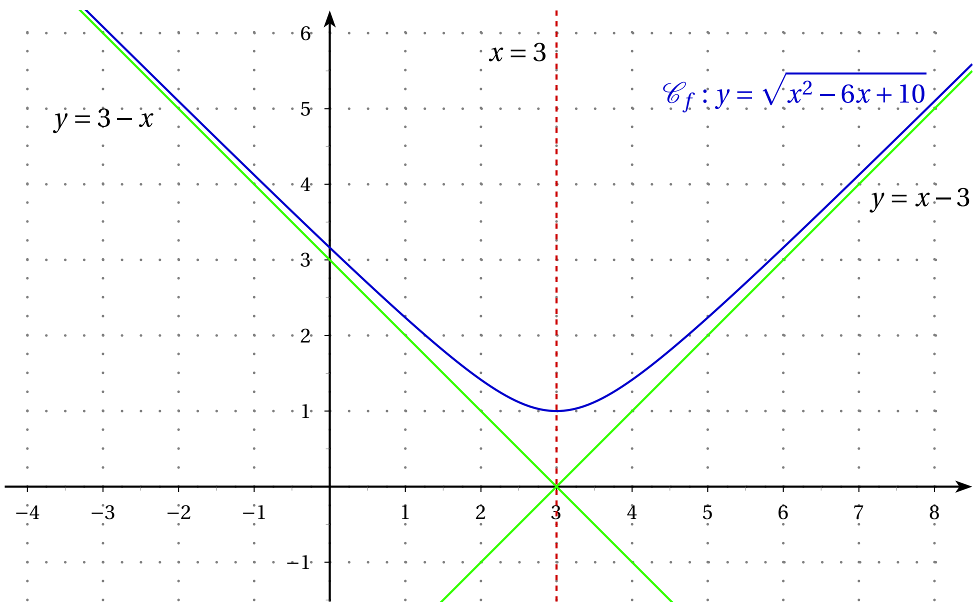
b. $\forall x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{f(x) + x - 3} &= \frac{1}{f(x) + x - 3} \times \frac{f(x) - (x - 3)}{f(x) - (x - 3)} \\
&= \frac{f(x) - (x - 3)}{f(x)^2 - (x - 3)^2} \\
&= \frac{g(x)}{x^2 - 6x + 10 - (x^2 - 6x + 9)} \\
&= \frac{g(x)}{1} = g(x)
\end{aligned}$$

c. $f(x)$ devient très grand quand x devient très grand. C'est aussi le cas de $x-3$.

d. On sait que $g(x) = \dfrac{1}{f(x)+x-3}$. Or $f(x)$ et $x-3$ peuvent être aussi grand que l'on veut, à condition que x positif soit suffisamment grand. Donc $f(x)+x-3$ aussi.
On en déduit que $g(x) = \dfrac{1}{f(x)+x-3}$ peut être aussi petit que l'on veut, à condition que x positif soit suffisamment grand.
On dit que la limite de la fonction $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$ est 0.
On note ceci ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$

5.



Sur le graphique, on a représenté $\mathscr{C}_f$. On constate que ses variations et son minimum sont conformes à ce que l'on a démontré en 1.
On remarque également son axe de symétrie $x=3$, tracé en pointillés.
Graphiquement, on voit clairement qu'il y a une ou deux solutions à l'équation $f(x) = \mathrm{M}$, pour tout $\mathrm{M} \geq 1$.
Enfin, on a représenté les droites d'équation $y = x-3$ et $y = 3-x$.
Attardons-nous sur la première. La question 4d. nous a fait montrer que $g(x) = f(x)-(x-3)$ pouvait être aussi petit que l'on voulait, à condition que $x>0$ soit suffisamment grand. Graphiquement, cela signifie que l'écart entre $\mathscr{C}_f$ et la droite $y = x-3$ peut être aussi petit que l'on veut, à condition que x positif soit suffisamment grand. C'est pourquoi on voit que la courbe en gras se rapproche de plus en plus de la droite (sans jamais la toucher).
On dit que la droite $y = x-3$ est une *asymptote oblique* à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.
Par symétrie, l'écart entre la courbe en gras et la droite d'équation $y = 3-x$ devient également aussi petit que l'on veut, à condition que x soit suffisamment grand *dans les négatifs.*
On dit que la droite $y = 3-x$ est une asymptote oblique à la courbe représentative de f en $-\infty$.