Devoir Maison 3 bis : Propriétés d'une courbe

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sqrt{\left|x^2 - 6x + 10\right|}$$

1. **Variations de f** :
   - **a.** Ecrire le trinôme $x^2 - 6x + 10$ sous sa forme canonique et en déduire son signe.
   - **b.** Ecrire alors f sans valeur absolue.
   - **c.** Dresser le tableau de variations de f.
   - **d.** La fonction f admet-elle un minimum ? un maximum ? Si oui, préciser le(s)quel(s).
2. **Première propriété de la courbe représentative de f** : Soit $h \in \mathbb{R}$.
   - **a.** Calculer $f(3-h)$ et $f(3+h)$.
   - **b.** Quelle propriété géométrique les points $\mathrm{A}\big(3-h; f(3-h)\big)$ et $\mathrm{B}\big(3+h; f(3+h)\big)$ de la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de f vérifient-ils ?
   - **c.** Ceci est-il vrai pour tout $h \in \mathbb{R}$? Qu'en déduit-on sur $\mathscr{C}_f$?
3. **Comportement à l'infini de f** : *notion de limite à l'infini*
   - **a. Cas particuliers.** On pose $\mathrm{M} = 10$.
     - i. Résoudre dans $\mathbb{R}^+$ l'équation $f(x) = \mathrm{M}$.
       *Penser à utiliser la forme canonique trouver dans la question **1.** ...*
     - ii. Grâce à la question précédente et au tableau de variation de f, déterminer l'ensemble de solutions positives de l'inéquation $f(x) \geq \mathrm{M}$.
     - iii. Existe-t-il X tel que pour tout $x \geq \mathrm{X}$ on a $f(x) \geq \mathrm{M}$? Si oui, donner deux valeurs possibles pour X.
     - iv. Reprendre les questions précédentes pour $\mathrm{M} = 10^5$ puis $\mathrm{M} = 10^{37}$, sans détailler les réponses.
   - **b. Cas Général.** Soit $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$
     - i. Montrer que l'équation $f(x) = \mathrm{M}$ admet zéro, une ou deux solutions suivant la valeur de M que l'on précisera.
     - ii. Résoudre l'inéquation $f(x) \geq \mathrm{M}$ en distinguant les trois cas précédents.
     - iii. Traduire les quantificateurs $\forall$ et $\exists$ dans la proposition suivante :

       $$\forall \mathrm{M} \in \mathbb{R}, \exists \mathrm{X} \in \mathbb{R}, \forall x \geq \mathrm{X} \text{ on a } f(x) \geq \mathrm{M}$$

       Concrètement, cela signifie que : « Peu importe le nombre M *que l'on choisit, il existe un moment à partir duquel $f(x)$ est toujours supérieur à* M *»*
       Autrement dit, $f(x)$ peut être rendu aussi grand que l'on veut à la seule condition de choisir x suffisamment grand.
       On dit encore que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
     - iv. Expliquer pourquoi cette affirmation est toujours vraie, en proposant une valeur de X possible dans chacun des trois cas précédents (cette valeur dépendant éventuellement de M).
     - v. Que cela signifie-t-il pour la courbe représentative de f ?
     - vi. Quelle nouvelle information peut-on alors apporter dans le tableau de variations de la fonction f ?
     - vii. Grâce à la propriété trouver à la question **2.**, trouver une autre information à rajouter dans le tableau de variation de f.

4. Deuxième propriété de la courbe représentative de f : *notion d'asymptote*

On définit la fonction g par $g(x) = f(x) - (x-3)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

a. Calculer $g(10)$, $g(10^5)$ et $g(10^{37})$ à 10^{-6} près.

b. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1}{f(x)+x-3}$$

On pourra utiliser l'expression conjuguée de $f(x)-(x-3)$ ...

c. Rappeler le comportement de $f(x)$ si l'on choisit un x très grand.
Quel est celui de $x-3$ dans le même cas ?

d. En déduire que l'affirmation « le nombre "$g(x)$" peut être rendu aussi petit que l'on veut à la seule condition que x soit suffisamment grand » est vraie.
On dit que $g(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$

e. Justifier alors les différents éléments graphiques de la représentation graphique ci-dessous sachant que la courbe est tracée en bleue.
On précisera les équations de chacune des trois droites représentées