Chapitre 6

Vecteurs

Hors Sujet

Titre : « Alphaville »

Auteur : Jean Luc Godard

Présentation succinte de l'auteur : Alphaville, une étrange aventure de Lemmy Caution (ou Alphaville) est un film franco-italien de science-fiction de Jean-Luc Godard sorti en 1965. Il a reçu l'Ours d'or 1965 au Festival international du film de Berlin.

Dans une époque postérieure aux années 1960, les autorités des « pays extérieurs » envoient le célèbre agent secret Lemmy Caution (Eddie Constantine) en mission à Alphaville, une cité déshumanisée, éloignée de quelques années-lumière de la Terre. Caution est chargé de neutraliser le professeur von Braun, tout-puissant maître d'Alphaville, qui y a aboli les sentiments humains. Un ordinateur, Alpha 60, régit toute la ville. Un message de Dickson, un ex-agent secret, ordonne à Lemmy de « détruire Alpha 60 et de sauver ceux qui pleurent ». Mais ce dernier est enlevé, interrogé par Alpha 60 et condamné à mort ...

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : C. Aupérin
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée : Jules Fil (Carcassonne)

Table des matières

L'ESSENTIEL :

- ⇝ Résoudre des équations du second degré.
- ⇝ Etudier le signe d'un trinôme.
- ⇝ Maitriser l'allure de la courbe d'une fonction polynôme du second degré.

« *Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous* »
THURSTON MOORE (SONIC YOUTH)

VECTEURS

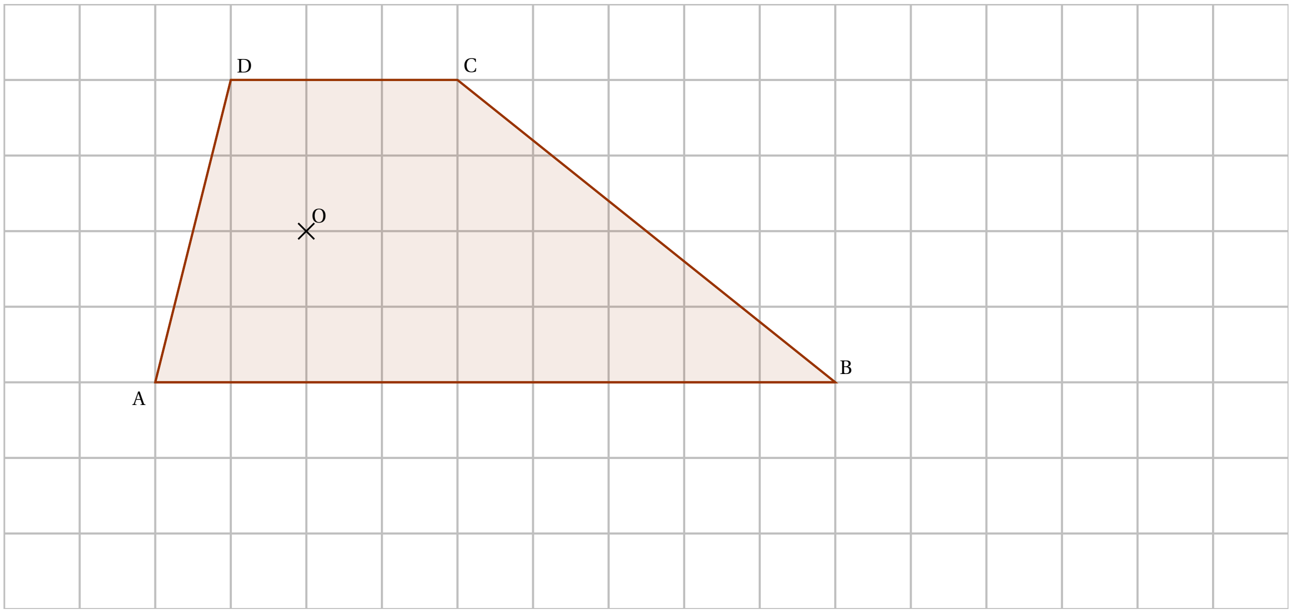
Au fil du temps

On désigne un vecteur par une flèche, plus ou moins longue, qui pointe dans une direction. Elle n'est ancrée à rien, même si elle peut se fixer sur un point précis d'un objet physique ...
Telle est l'essence étrange des vecteurs, à mi-chemin entre une droite bien concrète et une représentation abstraite. Représentation de quoi ? D'un mouvement ou d'une force physique, comme la gravité qui nous rive au sol ...
Le mot vecteur vient du latin “vector”, dérivé du verbe “vehere”, qui signifie transporter. Un vector pourrait donc désigner un véhicule, par exemple un chariot, son point de départ n'ayant pas d'importance sur sa nature.
De fait, c'est le caractère abstrait des vecteurs qui explique qu'ils aient mis des siècles pour passer de la notion intuitive à un concept mathématique et physique formel, au XIX^{e} siècle.
En particulier, c'est la nature peu maniable de la droite géométrique, telle que l'avait définie le grec Euclide au III^{e} avant JC, qui a progressivement conduit à la formalisation des vecteurs. En effet, Euclide décrit dans son ouvrage L*es Elements* la droite comme « une longueur sans largeur », dont « les limites sont des points » et « qui est placée de manière égale par rapport aux points qui sont sur elle ». Si ces définitions conduisent à l'idée de distance entre points, cela laisse peut de place aux opérations mathématiques... Quelles manipulations sont permises ? ?
Mais l'oeuvre d'Euclide traverse les siècles et progressivement les manipulations de figures sont associées à des équations algébriques qui libèrent la droite de ses contraintes géométriques, notamment au XI^{e} sicèle, grâce au le poète, philosophe et mathématicien perse Omar Khayyâm. La symbiose entre la géométrie et l'algèbre se fera au XVII^{e} siècle, grâce à René Descartes et son invention des coordonnées (dites cartésiennes).
Pourtant c'est la physique, entre 1604 et 1687, qui rendra les vecteurs indispensables, car ils incarneront les notions de vitesse, d'accélération et de force s'exerçant sur un solide. C'est Galilée qui lance ce processus, par la découverte des premières lois du mouvement d'un solide.
Chez Galilée, les notions de vitesse et d'accélération restent informelles, tout comme celle de force qui attire les corps vers le sol, mais elles conduiront l'anglais Isaac Newton, en 1687, à leur donner un sens clair via le concept de vecteur.
Newton instaure également les règles d'addition entre forces, entre accélérations, entre vitesses ... qui sont celles des vecteurs tels qu'on les connait aujourd'hui.
Pour finir, disons que les savants du XIX^{e} incluront les vecteurs dans un cadre plus large, celui des tenseurs, dont Einstein fera grand usage dans sa théorie de la relativité, qui généralise la théorie de Newton.

I) Colinéarité de vecteurs

I.1. Caractérisation de vecteurs et opérations

Travail de l'élève **1.** Le quadrilatère ABCD est le trapèze ci-dessous. On note O le milieu de la diagonale [AC] et E le point tel que $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{DA}$.



1. **a.** Quels éléments caractéristiques de $\overrightarrow{OE}$ permettent de placer le point E ? Le faire.
   b. Justifier alors que le quadrilatère DAEO est un parallélogramme.
2. **a.** Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AO}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{CO}$.
   b. Décrire les éléments caractéristiques du vecteur $\overrightarrow{AO}$ par rapport à ceux du vecteur $\overrightarrow{CO}$.
   c. Comment qualifie-t-on de tels vecteurs ?
3. **a.** Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{CD}$.
   b. Décrire les éléments caractéristiques du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par rapport à ceux du vecteur $\overrightarrow{CD}$.
   c. Comment qualifie-t-on de tels vecteurs ?
4. **a.** Construire un représentant du vecteur $\overrightarrow{AO}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$
   b. Construire le vecteur $\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{DC}$ ayant pour origine O. Quel vecteur obtient-on ? Expliquer par un calcul.
   c. Montrer que le vecteur $\vec{u}=2\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CO}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.

Définition 1. (Translation de vecteur)

Le **vecteur** $\overrightarrow{AB}$ symbolise le déplacement rectiligne de A vers B. On l'associe à la translation qui transforme A en B, noté $t_{\overrightarrow{AB}}$ et on le représente par une flèche allant de A vers B.

Caractérisation d'un vecteur

Un vecteur non nul du plan est caractérisé par :

Sa direction Son sens Sa norme (longueur)

Remarques :

⇝ Un vecteur est indépendant de son point de son origine (point de départ)

- Il existe un vecteur qui n'a ni direction, ni sens, et de la longueur 0. On l'appelle le *vecteur nul* et on le note $\vec{0}$.
- Deux vecteurs sont dits **opposés** lorsqu'ils ont la même direction, la même norme, mais des sens opposés.
  On note $-\vec{u}$ l'opposé du vecteur $\vec{u}$. Ainsi l'opposé de $\overrightarrow{AB}$ est $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$
- La norme d'un vecteur $\vec{u}$ une longueur. C'est un donc nombre positif ou nul. On le note $||\vec{u}||$.
  En particulier : $||\overrightarrow{AB}|| = AB$
- On définit assez naturellement grâce à la translation, la somme de deux vecteurs, ainsi que le produit d'un vecteur par un nombre réel.

Propriété 1.

Soient A, B, C et D quatre points avec A et B distincts.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si et seulement si ABDC est un parallélogramme.

Preuve

Il suffit de revenir à la caractérisation des vecteurs.

Proposition 1. (Relation de Chasles)

Pour tous points A, B et C, on a :

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

Preuve

Cela vient de la définition de la somme de deux vecteurs comme vecteur associé à la translation résultant de l'enchainement de $t_{\overrightarrow{AB}}$ et $t_{\overrightarrow{BC}}$

Définition 2.

On dit que deux vecteurs non nuls sont **colinéaires** lorsqu'ils ont la même direction.

Remarque : Par convention, le vecteur nul est colinéaire à tout autre vecteur.

Proposition 2.

Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe $k \in \mathbb{R}^*$ tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

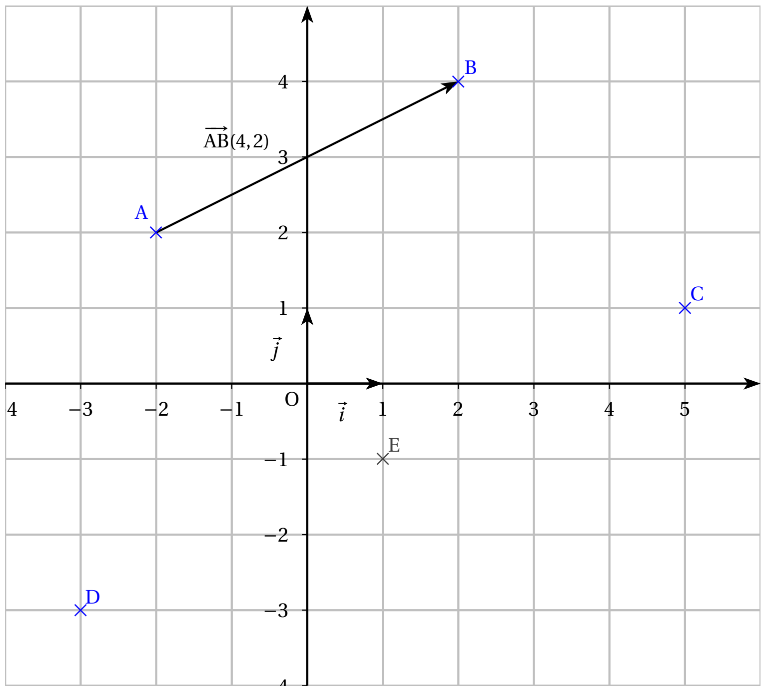
Preuve

Il suffit de revenir à la caractérisation des vecteurs et à la définition de la multiplication d'un vecteur par un réel.

I.2. Coordonnées de vecteurs

A partir de maintenant, on se place dans un repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan.

Travail de l'élève **2.** Dans un repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan, on considère les points $A(-2;2)$, $B(2,4)$, $C(5,1)$ et $D(-3,-3)$. Le point E est le milieu du segment $[CD]$.



1. Géogébra indique que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$

   a. Que représentent ces coordonnées pour le vecteur $\overrightarrow{AB}$?

   b. Comment peut-on retrouver les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ à partir des coordonnées de A et B ?

   c. Comment voit-on sur leurs coordonnées que deux vecteurs sont colinéaires ?

2. Retrouver les coordonnées de $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{DC}$ à partir des coordonnées de leurs points extrêmes.

3. **Applications géométriques :**

   a. Démontrer que le quadrilatère ABCD est un trapèze.

   b. Démontrer que le quadrilatère ABED est un parallélogramme. Est-ce un losange ?

   c. Quel autre quadrilatère est un parallélogramme ? Est-ce un losange ?

   d. Le point O appartient-il à la droite (AE) ? Justifier.

Définition 3.

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$. On appelle coordonnées du vecteur $\vec{u}$ les coordonnées du point M tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$. Si $M(x;y)$, on note $\vec{u}(x;y)$ ou encore $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

Remarques :

- Le couple $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ correspond également au déplacement effectué sur le quadrillage.
- En fait on a $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.
  Les coordonnées sont donc indépendantes de l'origine du repère.
- On en déduit facilement que deux vecteurs sont égaux ssi ils ont les mêmes coordonnées dans un repère.

$$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Longleftrightarrow x = x \text{ et } y = y'$$

- Soient deux vecteurs $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ et k un nombre réel. On a :

$$\vec{u}+\vec{v} \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad k\vec{u} \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$$

Propriété 2.

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur dans un repère **orthonormal** $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Grâce au théorème de Pythagore, on montre que :

$$||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Propriété 3.

Si A et B sont deux points de coordonnées respectives $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$ alors les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

On a donc aussi :

$$AB = ||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Exemple :

Dans un repère orthonormée on donne $A(2;3)$, $B(5;3)$ et $C(5;7)$. Montrer que le triangle ABC est rectangle.

Théorème 1.

Soient deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.
On a les équivalences suivantes : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires
$\iff$ il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$.
$\iff$ leurs coordonnées sont proportionnelles ($x = kx'$ et $y = ky'$ avec $k \in \mathbb{R}$).
$\iff$ $xy' - x'y = 0$

Remarque : La dernière condition a l'avantage de ne pas rechercher le coefficient de colinéarité.

Preuve

On sait déjà que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires équivaut à ce qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = k\vec{v}$, et on sait déjà que cela équivaut à ce que $x = kx'$ et $y = ky'$, ce qui revient à dire que les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont proportionnelles. Ainsi, montrons simplement la dernière équivalence.
Condition nécessaire : on suppose que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, ie qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $x = kx'$ et $y = ky'$.
Alors on a $xy' - x'y = kx'y' - x'ky' = 0$.
Donc on a bien « Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors $xy' - yx' = 0$ » Condition suffisante : on suppose que l'on a l'égalité $xy' - yx' = 0$.
Si $\vec{v}$ est nul, alors on a $x' = y' = 0$ et effectivement $xy' - x'y = 0$. Par convention le vecteur nul étant colinéaire à tout autre vecteur, on a bien que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
Si $\vec{v}$ est non nul, alors l'une de ses coordonnées est non nulle, par exemple son abscisse x'.
Alors $xy' - x'y = 0 \iff \dfrac{x}{x'}y' - y = 0$ (on peut effectuer cette opération car $x' \neq 0$.
Posons alors $k = \dfrac{x}{x'}$. Alors $x = kx'$ et $xy' - x'y = 0 \iff y - ky' = 0 \iff y = ky'$
Donc on a bien proportionnalité entre les coordonnées des deux vecteurs et ils sont bien colinéaires.
(si x est nul, alors $y \neq 0$ et on prendra alors $k = \dfrac{y}{y'}$ et la méthode restera la même). D'où $xy' - x'y = 0 \iff \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Exemples :

Les vecteurs suivants sont-ils colinéaires ? Si oui, préciser le coefficient de colinéarité :

1. $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ 12 \end{pmatrix}$
2. $\vec{w}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{z}\begin{pmatrix} -6 \\ -4 \end{pmatrix}$
3. $\overrightarrow{Lolo}\begin{pmatrix} -12 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{Néné}\begin{pmatrix} 135 \\ -45 \end{pmatrix}$
4. $\overrightarrow{Fabrice}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{Clément}\begin{pmatrix} -2 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$

Exemples :

Dire si les vecteurs suivants sont colinéaires, en utilisant le dernier critère énoncé ci-dessus.

1. $\overrightarrow{Wanda}\begin{pmatrix} 4 \\ -9 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{Nouki}\begin{pmatrix} 3.5 \\ -7.8 \end{pmatrix}$
2. $\overrightarrow{Ana}\begin{pmatrix} 6.4 \\ 3.1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{Gui}\begin{pmatrix} 22.4 \\ 10.85 \end{pmatrix}$
3. $\overrightarrow{Dounia}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -6 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{Nejema}\begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ 20 \end{pmatrix}$

Exemples :

1. On considère les vecteurs $\vec{u}_1\begin{pmatrix}-2\\7\end{pmatrix}$, $\vec{u}_2\begin{pmatrix}5.2\\-18.2\end{pmatrix}$ et $\vec{u}_3\begin{pmatrix}-6.4\\22.5\end{pmatrix}$. Lesquels sont colinéaires ?
2. Calculer le réel α pour que les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\-4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-5\\14\end{pmatrix}$ soient colinéaires.

Exercice 1 : Déterminer le(s) valeur(s) de k telle(s) que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires :

1. $\vec{u}\begin{pmatrix}k\\1\end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\k+1\end{pmatrix}$
2. $\vec{u}\begin{pmatrix}-k+1\\-2\end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}k^2+17\\5k-4\end{pmatrix}$

Exercice 2 :

1. Trouver un réel x tel que les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}\cos^2(x)\\-3\sin(x)+6\end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}\sin(x)\\3\end{pmatrix}$ soient colinéaires
2. L'opposé de la valeur trouvée précédemment est-elle aussi une solution ?
3. Etes-vous capable de donner d'autres solutions ? toutes les solutions ?

I.3. Applications directes

Travail de l'élève **3.** Dans le plan muni d'un repère, placer les points $A(8,6)$, $B(13,10)$ et $C\left(5,\dfrac{7}{2}\right)$

1. Fabrice pense que les points A, B et C sont alignés. A-t-il raison ? Justifier.
2. Soit D le point de coordonnées $(13, y)$.
   Déterminer y pour que les droites (AB) et (CD) soient parallèles.

Propriété 4 :
Soient A, B, C et D quatre points du plan deux à deux distincts.
Les droites (AB) et (CD) sont parallèles ssi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Corollaire 1 :
Soient A, B et C trois points du plan deux à deux distincts.
Les points A, B et C sont alignés ssi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Méthode
Pour démontrer que trois points sont alignés, il suffit de démontrer que deux des vecteurs formés par les trois points sont colinéaires.

Exemple :

On donne $A(-4;-1)$, $B(-1;1)$, $C(3;3)$, $D(-1;-3)$ et $E(5;1)$.

1. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires.
2. En déduire la nature du quadrilatère ABED.
3. Calculer les coordonnées du points F tel que ABEF soit un parallélogramme.
4. Les points A, B, C sont-ils alignés ?

Exemple :

Soit ABC un triangle et M tel que $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et N tel que $\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Montrer que A, M et N sont alignés.

Exercice 3 :

1. Tracer un quadrilatère quelconque ABCD.
   Placer les milieux respectifs I, J, K et L des côtés [AB], [BC], [CD] et [AD].
2. Prouver que le quadrilatère IJKL est un parallélogramme.

Exercice 4 : ABC est un triangle. Soient D et E les points tels que $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

1. Démontrer que $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AE}$.
2. En déduire que D appartient à la droite (AE).

Exercice 5 : Soient A et B deux points distinct du plan. On définit le point C tel que $4\overrightarrow{CA} - 5\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$.

1. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AC}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
2. Que peut-on en déduire sur les points A, B et C ? Faire une figure.

Exercice 6 : Dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(6;2)$, $B(-2;-3)$ et $C(17;9)$.

1. Que dire des points A, B et C ?
2. Si le point D a pour coordonnées $(120;75)$ le quadrilatère BADO est-il un trapèze ?

Exercice 7 : On donne les points $A(2,1)$, $B(x,4)$ et $C(x+2,3)$.
Pour quelle(s) valeur(s) de x les points A, B et C sont-ils alignés ?

Exercice 8 : On donne les points $M(x,5)$, $A(2,4)$, $R(3,x-1)$ et $E(2,1)$.
Pour quelle(s) valeur(s) de x les droites (MA) et (RE) sont-elles parallèles ?

Exercice 9 : On considère les points $A(-2;5)$, $B(-1;3)$, $C(5;-2)$ et $D\left(-2;-\frac{13}{3}\right)$. E est le point tel que $\overrightarrow{AE} = 4\overrightarrow{AB}$.

1. Calculer les coordonnées du point E.
2. Démontrer que les points C, D et E sont alignés.

Exercice 10 : Dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère les points $A(-1;-3)$, $B(-3,3)$, $C(4;2)$ et $D(5;-1)$.
Démontrer que le quadrilatère ABCD est un trapèze rectangle.
Indication : on peut dessiner une figure pour savoir quels côtés sont parallèles et où est l'angle droit.

Exercice 11 : Voici un algorithme :

Algorithme 1 :

Variables
x_A, y_A, x_B, y_B, x_C, y_C, a, b, c et d sont des nombres réels

Début
Saisir x_A, y_A, x_B, y_B, x_C, y_C
$x_B - x_A \longrightarrow a$
On affecte la valeur $y_B - y_A$ à b
c prend la valeur $x_C - x_A$
$d := y_C - y_A$
Si ($ad - bc = 0$) **Alors**
Afficher « les points sont alignés »
Sinon
Afficher « les points ne sont pas alignés »
Fin Si
Fin

1. Tester à la main cet algorithme avec les points $A(1;-2)$, $B(3;5)$ et $C(1;-1)$.
2. Que fait-il ?
3. Ecrire cet algorithme sur votre calculatrice graphique.

Exercice(s) du livre : (Repère) Sans coordonnées : n° **72-81-86** à 91+95+96 p 333 Algo : n° 79-97 p 333
DM : n° 83 (th du trapèze) ? ? ou Barycentre 108-110 p 338 + Centre de gravité 107 p 337 + Droite d'Euler 109 p 338

II) Décomposition de vecteurs dans une base

Travail de l'élève **4.**

1. **Lecture.**
Dès lors que l'on choisit deux vecteurs non colinéaires du plan, on crée un moyen de repérer tous les autres vecteurs de ce plan : on a choisi une base.
On considère les deux figure suivantes :

Figure 1

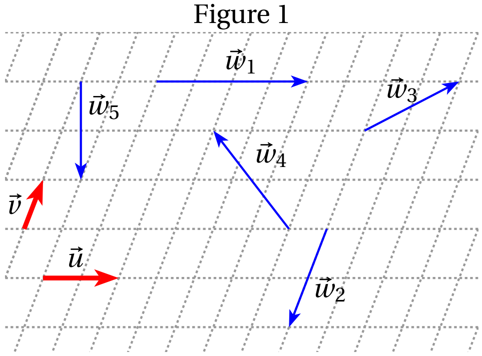
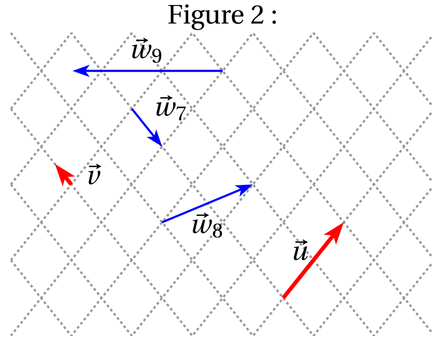


Figure 2 :



Ecrire chaque vecteur $\vec{w}_i$ sous la forme d'une somme vectorielle du type : $\vec{w}_i = \spadesuit\vec{u} + \clubsuit\vec{v}$ (où le coeur et le trèfle désignent des réels à déterminer).

2. Utilisation de la décomposition.

a. Construire un parallélogramme ABCD.
Placer les points I et J tels que $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ} = 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CD}$.

b. On désire prouver l'alignement des points I, J et C à l'aide de relations vectorielles.

i. Exprimer $\overrightarrow{AC}$ dans la base $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)$ et montrer que $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et que $\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AD}$.

ii. En déduire l'expression des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IC}$ dans la base $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)$.

iii. En comparant les deux composition obtenues, prouver que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IC}$ sont colinéaires. Conclure.

Définition 4.

Trois points non alignés définissent un repère quelconque du plan. De même la donnée de deux vecteurs non colinéaires et d'un point (que l'on prendra comme origine) définissent un repère quelconque du plan.
On appelle **base** du plan vectoriel tout couple de deux vecteurs non colinéaires.

Exemple :

Voir l'activité.

Preuve

Sous forme d'exercice.
On considère trois points du plan A, B et C non alignés.
Soit M un point du plan.

1. Existence de la décomposition
La parallèle à (AC) passant par M coupe (AB) en P et la parallèle à (AB) passant par M coupe (AC) en Q.

a. Réaliser une figure.

b. Montrer qu'il existe un réel x tel que $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB}$ et un réel y tel que $\overrightarrow{AQ} = y\overrightarrow{AC}$.

c. Quelle est la nature du quadrilatère APMQ ? Justifier.

d. En déduire l'expression de $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

2. Unicité de cette décomposition
Suppsons maintenant qu'il existe deux couples $(x; y)$ et $(x'; y')$ tels que :

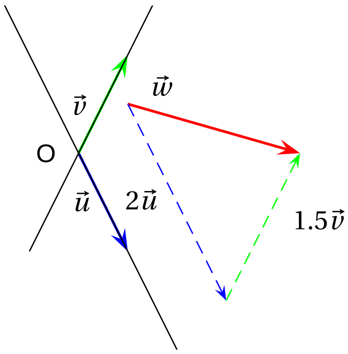
$$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} = x'\overrightarrow{AB} + y'\overrightarrow{AC}$$

a. Démontrer que $(x - x')\overrightarrow{AB} = (y' - y)\overrightarrow{AC}$.

b. En déduire que $x = x'$ et que $y = y'$.

c. Conclure.

Exemple :



Remarques :

⇝ x et y sont en fait les coordonnées de $\vec{w}$ dans un repère d'origine quelconque et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (on a déjà dit que les coordonnées d'un vecteur ne dépendaient pas de l'origine du repère).

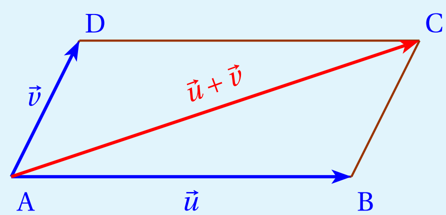
⇝ Dans un repère $(\mathrm{O};\vec{u};\vec{v})$ quelconque du plan, les coordonnées d'un point B sont les uniques nombres x et y tels que $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

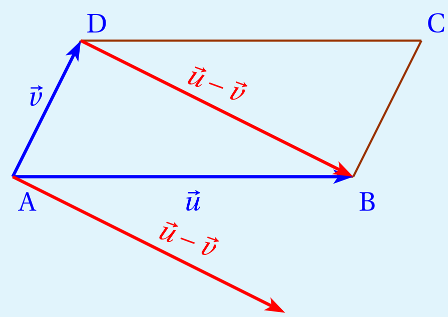
⇝ On représente souvent les vecteurs avec une même origine pour plus de lisibilité.

Relations utiles à connaître

Dans un parallélogramme ABCD on a :

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} \qquad \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{AD}}$$





Applications

Tous les résultats (formules et applications géométriques) établis dans un repère quelconque du plan de la partie I restent donc valables dans un repère de votre choix.

Remarque : Seul le calcul de distance nécessite un repère orthonormé et cette formule ne peut donc pas être appliquée dans un repère quelconque de votre choix.

Exemple :
A, B et C sont trois points non alignés. Les points N et P sont tels que

$$\overrightarrow{AN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{BP} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$$

1. Faire une figure.
2. **Montrer que des points sont alignés**
   - **a.** Décomposer le vecteur $\overrightarrow{AP}$ dans la base $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$.
   - **b.** En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont colinéaires.
   - **c.** Qu'en déduit-on pour les points A, P et N ?
3. **Détermination de coordonnées de vecteurs**
   Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AN}$ et $\overrightarrow{AP}$ dans les repères suivants :

   a. $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$. **b.** $\left(A;\overrightarrow{BA};\overrightarrow{AC}\right)$. **c.** $\left(A;\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)$. **d.** $\left(B;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$. **e.** $\left(B;\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)$.
4. **Détermination de coordonnées de points**
   Déterminer les coordonnées des points N et P dans les repères suivants :

   a. $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$. **b.** $\left(A;\overrightarrow{BA};\overrightarrow{AC}\right)$. **c.** $\left(A;\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)$. **d.** $\left(B;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$. **e.** $\left(B;\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)$.

Exemple :
A, B et C sont trois points non alignés. Les points D, E et F sont définis par :

$$\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} \qquad \overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{BF} = 2\overrightarrow{BC}$$

1. Faire une figure.
2. **Montrer que des points sont alignés**
   - **a.** Exprimer $\overrightarrow{DE}$ dans la base $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$.
     En déduire les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{DE}$ dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$.
   - **b.** Exprimer $\overrightarrow{DF}$ dans la base $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$.
     En déduire les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{DF}$ dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$.
   - **c.** En déduire que les points D, E et F sont alignés.
3. **Détermination de coordonnées de vecteurs**
   Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DF}$ dans les repères suivants :

   a. $\left(A;\overrightarrow{BA};\overrightarrow{AC}\right)$. **b.** $\left(A;\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)$. **c.** $\left(D;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$. **d.** $\left(B;\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)$.
4. **Détermination de coordonnées de points**
   Déterminer les coordonnées des points A, B, C, D, E et F dans les repères suivants :

   a. $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$. **b.** $\left(A;\overrightarrow{BA};\overrightarrow{AC}\right)$. **c.** $\left(A;\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)$. **d.** $\left(D;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$. **e.** $\left(B;\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)$.

Exercice 12 : ABCD est un rectangle. E est le symétrique de C par rapport à B, F est le symétrique de A par rapport à D, G est le point tel que $\overrightarrow{AG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

1. Faire une figure.
2. En se plaçant dans le repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD})$, démontrer que G, E et F sont alignés.
3. Soit H le point d'intersection de (EF) et (CD). Exprimer $\overrightarrow{DH}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.

Exercice 13 : ABCD est un tétraèdre. Dans le plan (ABC) on définit le point K par $\overrightarrow{AK}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

1. Faire un figure dans l'espace, puis une figure dans le plan (ABC).
2. En choisissant un repère du plan (ABC), démontrer que K appartient à [BC].

Exercice 14 : On considère ABCD un parallélogramme non aplati.

1. Donner la décomposition des vecteurs $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AO}$ et $\overrightarrow{BC}$ dans la base $\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD}\right)$.
2. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{CA}$ dans chacune des bases suivantes :
   a. $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)$. **b.** $\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}\right)$. **c.** $\left(2\overrightarrow{CB};-0,5\overrightarrow{CD}\right)$
3. Quelles sont les coordonnées du vecteur $\vec{w}=\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{BD}$ dans la base $\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD}\right)$.

Exercice 15 : Soit EFG un triangle. Le point I est tel que $\overrightarrow{GI}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{GF}$ et H est l'image de E par la translation de vecteur $\overrightarrow{FE}$. Le point O est le milieu de [EG].

1. Faire une figure.
2. Expliquer pourquoi $\left(F;\overrightarrow{FG};\overrightarrow{FE}\right)$ est un repère du plan.
3. En se plaçant dans ce repère, démontrer que les points I, O et H sont alignés.

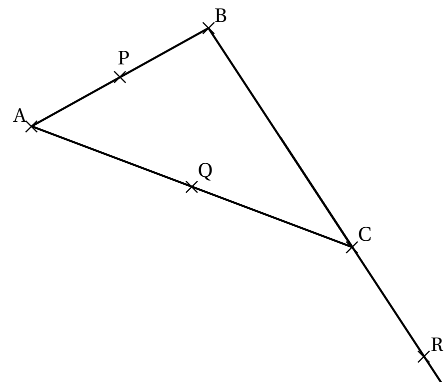
Exercice 16 : ABC est un triangle.
I est le milieu de [BC] et M est un point de la parallèle à (AB) passant par I.
La parallèle à (AC) passant par I coupe la parallèle à (BC) passant par M en N.

1. **a.** Réaliser une figure avec un logiciel de géométrie.
   b. Semble-t-il exister une position du point M pour laquelle :
   - ⇝ M = N ?
   - ⇝ BCMN est un parallélogramme ?
   - ⇝ BCNM est un parallélogramme ?
2. On se place dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$.
   a. Justifier que les coordonnées du point M peuvent s'écrire $\left(k;\dfrac{1}{2}\right)$ où k désigne un nombre réel.
   b. Exprimer les coordonnées de N en fonction de k.
   c. Justifier les conjectures émises à la question 1.b..

Exercice 17 : Soit ABC un triangle et a un réel. On considère les points P, Q et R définis par :

$$\overrightarrow{AP} = a\overrightarrow{AB} \qquad \overrightarrow{CQ} = a\overrightarrow{CA} \qquad \overrightarrow{CR} = a\overrightarrow{CB}$$

La figure ci-contre correspond au cas où $a = \dfrac{1}{2}$



Existe-t-il des valeurs de a pour lesquelles les points P, Q et R sont alignés ?

Exercice 18 : Soit un triangle RST et K le milieu de [RS].

1. Construire les points H et L tels que :

$$\overrightarrow{TH} = -3\overrightarrow{TR} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{SL} = -2\overrightarrow{ST}$$

2. Montrer que $\overrightarrow{TR} + \overrightarrow{TS} = 2\overrightarrow{TK}$.
3. Décomposer le vecteur $\overrightarrow{HL}$ dans la base $\left(\overrightarrow{TR}; \overrightarrow{TS}\right)$
4. En déduire que (HL) et (TK) sont parallèles.

Exercice 19 : Construire un triangle ABC, puis les points D, E et F tels que $\overrightarrow{AD} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AE} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BF} = 2\overrightarrow{BC}$.

Le but de cet exercice est de démontrer par deux méthodes différentes que D, E et F sont alignés.

1. **a.** Décomposer $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DF}$ dans la base $\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right)$.
   b. Démontrer que D, E et F sont alignés.
2. La parallèle à (DE) passant par C coupe [AB] en un point I.
   a. Démontrer que E est le milieu de [AI].
   b. En déduire que I est le milieu de [EB].
   c. Démontrer alors que la droite (CI) est parallèle à la droite (FD). Conclure.

Exercice 20 : ABCD est un tétraèdre. I est le milieu de [AB], J celui de [BD] et K celui de [JC]. E est le point du segment [AE] tel que $AE = \dfrac{2}{3}AJ$ et F est le point du segment [BC] tel que $BF = \dfrac{2}{3}BC$.

1. Faire une figure.
2. On se place dans le plan (ABD). Faire une figure (dans le plan (ABD)) puis démontrer que I, E et D sont alignés.
3. On se place dans le plan (BCD). Démontrer que F, K et D sont alignés.
4. **a.** Que peut-on dire des droites (IE) et (FK) ?

b. En déduire que I, E, F et K sont coplanaires.

Exercice(s) du livre : (Repère) 82 p 333 + 92 p 335

III) Vecteurs et Droites

III.1. Vecteurs directeurs d'une droite

Travail de l'élève **5.** Dans un repère, on considère les points $A(-1;1)$, $B(5;4)$, $C(2;6)$ et $D(0;5)$.
Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $\overrightarrow{CM} = k\overrightarrow{CD}$ pour $k \in \mathbb{R}$.

1. Détermination de l'ensemble $\mathscr{E}$

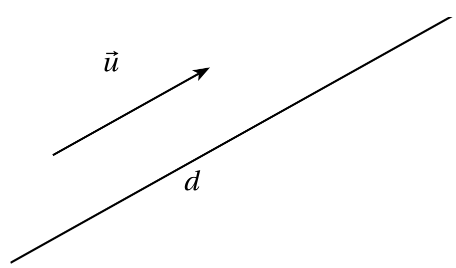
- **a.** Pour quelle valeur de k le point M est-il en C ? en D ? au milieu de [CD] ?
- **b.** Pour quelles valeurs de k le point M est-il sur la demi-droite issue de C ne contenant pas le point D ? Celle issue de D ne contenant pas le point C ?
- **c.** Quel lieu géométrique $\mathscr{E}$ décrit le point M ?
- **d.** Est-ce le même que l'ensemble des points M tels que $CM = kCD$ avec $k \in \mathbb{R}$?

2. On dit que $\overrightarrow{CD}$ est ...

- **a.** En citer trois autres.
- **b.** Montrer que ABCD est un trapèze.
- **c.** Pourquoi le vecteur de coordonnées $(3;1)$ n'est pas un vecteur directeur de la droite (CD). Peut-il être un vecteur directeur de la droite (AB) ?
- **d.** Déterminer la valeur de k telle que ABMD soit un parallélogramme. Même question pour ABDM.

Définition 5.

Soit d une droite du plan.
On appelle **vecteur directeur** de d tout vecteur non nul $\vec{u}$ qui possède la même direction que la droite d.



Remarque : Si A et B sont deux points distincts d'une droite d alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ dirige la droite d et tout vecteur non nul colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite (AB).
Une droite possède donc une infinité de vecteurs directeurs.

Exemple :
Dans un repère, soit $A(-2;3)$, $B(3;1)$ et $C(-1;-3)$. Déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur de la médiane passant par le sommet A du triangle ABC.

Proposition 3.

- Une droite d peut être définie par un point A et un vecteur directeur $\vec{u}$.
  Un point M appartient à cette droite si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.
- Deux droites de vecteur directeur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont parallèles si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Preuve

- La droite d est la droite (AB) avec B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.
  Or $M \in (AB) \iff \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinaires.
- $d // d' \iff d$ et d' ont la même direction, ie des vecteurs directeurs colinéaires.

Exemple :

Dans un repère du plan, on donne les points $A(4;0)$, $B(2;-3)$, $C(2;1)$ et le vecteur $\vec{u}(3;5)$.

1. Déterminer un vecteur directeur de la droite (AC).
2. Tracer la droite d passant par B, de vecteur directeur $\vec{u}$.
3. Les droites d et (AC) sont-elles parallèles ?
4. Le point $E\left(-3;\dfrac{7}{2}\right)$ appartient-il à la droite (AC) ? Justifier.
5. Montrer que le point A n'appartient pas à la droite d.

Proposition 4.

Le plan est muni d'un repère.

- Soit d une droite d'équation $y = mx + p$ alors le vecteur $\vec{u}\,(1;m)$ dirige la droite d.
- Soit d' une droite d'équation $x = c$ alors le vecteur $\vec{u}\,(0;1)$ dirige la droite d'.

Preuve

$d : y = mx + p$ donc le point $A(0,p) \in d$ et le point B de coordonnées $(1, m+p)$ est aussi un point de la droite d.
Ainsi le vecteur $\overrightarrow{AB}$ dirige la droite d et ce vecteur a pour coordonnées :

$$\left(1-0; m+p-p\right) = (1;m)$$

$d' : x = c$ donc $A(c,0)$ et $B(c,1)$ appartiennent à d'. Ainsi le vecteur $\overrightarrow{AB}$ dirige la droite d' et ce vecteur a pour coordonnées :

$$(c-c;1-0) = (0;1)$$

III.2. Equation cartésienne d'une droite

Travail de l'élève **6.**

1. **Cas particulier :**
   Dans un repère, on considère les points $A(2;6)$ et $B(0;5)$.
   On se propose de trouver une ***caractérisation analytique*** *de la droite* (AB) *de l'activité précédente ie de trouver*

une ***condition nécessaire et suffisante sur*** x ***et*** y ***pour qu'un point*** $\mathrm{M}(x; y) \in (\mathrm{CD})$**.**
On sait que la droite (AB) est l'ensemble des points $\mathrm{M}(x; y)$ tels que $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

a. Déterminer x et y en fonction de k.

b. En déduire une équation d'inconnues x et y traduisant le fait que $\mathrm{M} \in (\mathrm{AB})$.

c. *L'expression trouvée est* ***une*** *équation cartésienne de la droite* (AB).
Expliquer pourquoi on utilise l'article indéfini « une ».

2. Démonstration :
On veut montrer que toutes les droites admettent une équation cartésienne du type $ax + by = c$. Dans un repère, on considère une droite d quelconque. Soit $\mathrm{A}(x_0; y_0)$ l'un de ses points, $\vec{u}(\alpha;\beta)$ un de ses vecteurs directeurs et $\mathrm{M}(x; y)$ un point quelconque du plan.

a. Donner une condition vectorielle qui traduit l'appartenance de M à la droite d.

b. Reproduire la méthode de la question 1 pour montrer que le test d'appartenance du point M à la droite d est bien de la forme $ax + by = c$ (avec a, b et c à déterminer en fonction de x_0, y_0, α et β).

c. Expliquer pourquoi a et b ne peuvent pas être tous les deux nuls.

d. Montrer que les types d'équations étudiées en secondes peuvent à présent trouver une version unifiée grâce à l'utilisation de l'expression $ax + by + c = 0$, en précisant les valeurs de a, b et c dans chaque cas (droites parallèles ou non à l'axe des ordonnées).

Dans la suite du chapitre, on se place dans un repère $(\mathrm{O}; \vec{i}; \vec{j})$ du plan.

Théorème 2. (Définition)

Toute droite d (même celles qui sont parallèles à l'axe des ordonnées) admet une équation, dite **cartésienne**, de la forme $ax + by = c$ où a, b et c sont des réels tels que $(a; b) \neq (0; 0)$.

Preuve
Soit $\mathrm{A}(x_\mathrm{A}; y_\mathrm{A})$ un point de d et $\vec{u}(\alpha;\beta)$ un vecteur directeur de d.

$$\begin{aligned} & \mathrm{M}(x; y) \in d \\ \iff & \overrightarrow{\mathrm{AM}}\left(x - x_\mathrm{A}; y - y_\mathrm{A}\right) \text{ et } \vec{u}\left(\alpha;\beta\right) \text{ sont colinéaires} \\ \iff & \beta(x - x_\mathrm{A}) - \alpha(y - y_\mathrm{A}) = 0 \\ \iff & \beta x - \alpha y = \beta x_\mathrm{A} - \alpha y_\mathrm{A} \end{aligned}$$

On obtient le résultat voulu en posant $a = \beta$, $b = -\alpha$ et $c = \beta x_\mathrm{A} - \alpha y_\mathrm{A}$. De plus comme $\vec{u} \neq \vec{0}$, les réels a et b ne sont pas tous les deux nuls.

Remarques :

⇝ Dire qu'une droite d admet pour équation $ax + by = c$ signifie qu'un point $\mathrm{M}(x; y)$ appartient à d si et seulement si ses coordonnées vérifient cette équation.

⇝ $\forall k \in \mathbb{R}^*$, $kax + kby = kc$ est aussi une équation cartésienne de la droite $d : ax + by = c$ (il y en a donc une infinité).

⇝ Jusqu'à présent, vous avez présenté les équations de droites sous deux formes :
- $x = c$ pour les droites parallèles à l'axe des ordonnées

– $y = mx + p$ pour les autres (représentant les fonctions affines). Ce type d'équation s'appelle équation réduit d'une droite et celle-ci est unique.

Désormais, il n'est plus nécessaire de distinguer les cas.

Théorème 3.

Toute équation de la forme $ax + by = c$ avec $(a; b) \neq (0; 0)$ est l'équation d'une droite.
De plus cette droite a pour vecteur directeur $\vec{u}(-b; a)$.

Preuve

On décompose cette démonstration, en étudiant deux cas, le premier si $b \neq 0$ et le second si $b = 0$.

⇝

$$\begin{aligned} & ax + by = c \\ \iff & by = c - ax \\ \iff & y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b} \end{aligned}$$

Ainsi l'équation $ax + by = c$ s'écrit sous la forme $y = mx + p$ avec $m = -\frac{a}{b}$ et $p = \frac{c}{b}$, or il s'agit de l'équation d'une droite qui coupe l'axe des ordonnées de vecteur directeur $\vec{v}\left(1; -\frac{a}{b}\right)$. Par conséquent le vecteur $-b\vec{v}$ dirige encore cette droite et a pour coordonnées :

$$(-b; a)$$

⇝ Si $b = 0$ alors l'équation $ax + by = c$ devient $ax = c$. De plus si $b = 0$ alors $a \neq 0$ et donc l'équation $ax + by = c$ peut s'écrire $x = \frac{c}{a}$ qui est l'équation d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées. Un vecteur directeur de cette droite est alors $\vec{v}(0; 1)$ et donc $a\vec{v}$ dirige encore cette droite et a pour coordonnées $(0; a)$.

Remarques :

⇝ $\vec{u}$ ne peut pas être nul, avec a et b sont non nuls simultanément

⇝ Si $b \neq 0$, l'équation de la droite s'écrit $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ et son coefficient directeur $m = -\frac{a}{b}$ est le quotient de la seconde coordonnée de $\vec{u}$ par la première, comme vu en seconde.

Exemples :

1. Dans un repère du plan, on donne les points $\mathrm{A}(4; 0)$, $\mathrm{B}(2; -3)$, $\mathrm{F}\left(3; -\frac{4}{3}\right)$ et le vecteur $\vec{u}(3; 5)$.
   - **a.** Déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par B, de vecteur directeur $\vec{u}$.
   - **b.** Le point F appartient-il à la droite d ?
   - **c.** Le point A appartient-il à la droite d ?
2. Dans un repère du plan, tracer les droites $d_1 : 2x + 3y = 5$ et $d_2 : -2x = -5$.
3. Déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par les points $\mathrm{A}(15; -10)$ et $\mathrm{B}(-25; 30)$.

Proposition 5.

Les droites d'équations $ax+by=c$ et $a'x+b'y=c'$ sont parallèles si et seulement si $ab'-a'b=0$.

Preuve

Le vecteur $\vec{u}(-b;a)$ dirige d et le vecteur $\vec{v}(-b';a')$ dirige d'. Ainsi $d//d'$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires i.e si et seulement si

$$-a'b+ab'=0 \Longleftrightarrow ab'-a'b=0$$

Exemple :

On considère un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ du plan.

1. Donner deux équations cartésiennes de la droite d passant par le point $A(5;-1)$ et parallèle à la droite $d_1 : 3x-y=-12$.
2. La droite d est-elle parallèle à la droite d_2 dont l'équation cartésienne réduite est $y=-3x+8$?
   Si non, déterminer leur point K d'intersection.

Méthode

Pour trouver la position relative de deux droites, on regarde grâce à la propriété ci-dessus si elles sont parallèles :

- Si oui, on regarde si elles sont confondues ou non (les équations sont-elles proportionnelles ?)
- Si non, on résout le système formé par les deux équations pour trouver les coordonnées de leur point d'intersection.

Exercice 21 : On considère un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ du plan.

1. On considère les points $A(2;-3)$ et $B(4;-5)$.
   Donner trois vecteurs directeurs de la droite (AB).
2. Déterminer trois équations cartésiennes de la droite d passant par le point $C(2;-1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(-1;2)$.
3. Donner une équation cartésienne de la droite d passant par le point $D(5;-1)$ et parallèle à la droite d_1 dont une équation cartésienne est $2x-7y=2$.
4. La droite d est-elle parallèle à la droite d_2 dont l'équation réduite $y=-\frac{2}{7}x+3$.
   Si non, donner les coordonnées de leur point d'intersection.

Exercice 22 : Quel est le coefficient directeur d'une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ avec :

1. $\vec{u}(1;-3)$
2. $\vec{u}(-2;4)$
3. $\vec{u}(5;-2)$
4. $\vec{u}\left(\frac{1}{4};2\right)$

Exercice 23 : Soit d la droite d'équation $2x-3y=-7$.

1. Le point $A(-2;1)$ appartient-il à d ?
2. Même question avec $B\left(\frac{1}{3};\frac{5}{2}\right)$ et $C\left(3;\frac{13}{3}\right)$.
3. Trouver l'ordonnée du point E de d d'abscisse $-\frac{2}{7}$.
4. Trouver l'abscisse du point F de d d'ordonnée $\frac{1}{5}$.

Exercice 24 : Placer les points $A(-2;4)$, $B(2;2)$, $C(-5;0)$ et le point D tel que $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB}$.

1. **a.** Quelle est la nature du quadrilatère ABDC ?
   b. Déterminer les coordonnées de D.
2. **a.** Soit $d : 6x + y = 14$.
   Vérifier que B et D appartiennent à d.
   b. Trouver une équation cartésienne de la droite (AC).
   c. Prouver que (BD) et (AC) sont sécantes.
   d. Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection E.
3. **a.** Calculer les coordonnées de K milieu de [AB] et de L milieu de [CD].
   b. Démontrer que les points E, K et L sont alignés.

Exercice 25 : Soit m un réel et d la droite d'équation $x + my + 3 = 0$ Peut-on trouver m tel que :

1. $\vec{u}(3;2)$ soit un vecteur directeur de d.
2. $A(-2;3)$ appartienne à d.
3. d soit parallèle à la droite d'équation $3x - y = 0$.
4. d soit parallèle à l'axe des abscisses.
5. d soit parallèle à l'axe des ordonnées.
6. d passe par l'origine du repère.
7. d passe par le point $J(0;1)$.

Exercice 26 : Dans un repère du plan $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère les points $A(3;4)$, $B(1;-1)$ et $C(6;-2)$.

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).
2. Déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par le milieu I de [AC] et parallèle à (AB).
3. Δ est la droite d'équation $-16x + y = -98$
   a. Prouver que Δ et (AB) sont sécantes en D de coordonnées à déterminer.
   b. Montrer que le milieu J de [DC] est un point de d de deux manières différentes.

Exercice 27 : Soit ABCD un trapèze tel que (AB) soit parallèle à (CD). Soit M le point d'intersection des droites (AD) et (CD). Soit I le milieu du côté [AB] et J celui du côté [CD]. On nomme K le point d'intersection des diagonales [AC] et [BD].
On veut démontrer que M, I, J et K sont alignés.

1. Justifier que $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$ est un repère.
2. Donner les coordonnées de A, B, D et I dans ce repère.
3. On nomme a l'abscisse du point C dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$. Déterminer, en fonction de a, les coordonnées de C et de J.
4. Déterminer une équation cartésienne de la droite (BC) et en déduire les coordonnées de M.
5. Montrer que les points M, I et J sont alignés.
6. Déterminer une équation cartésienne de (BD) et de (AC). En déduire les coordonnées de K.
7. Conclure.

Exercice(s) du livre : Repère : n° 57 - 65 à 69 p 331 + n° 110 - 113 (?) p 339
Math'x : 64 p 279 (logique)
DM : 108 p 338 (barycentre) + 107 p 337 (médiane)
Algo : (Hyperbole) n° 77-78 p 181 + 49 p 174 + (Odyssée) 62 p 197

« La physique est bien trop dure pour les phycisiens »

DAVID HILBERT, mathématicien