CHAPITRE 5

POLYNÔMES DU SECOND DEGRÉ

HORS SUJET

TITRE : « Alphaville »

AUTEUR : JEAN LUC GODARD

PRÉSENTATION SUCCINTE DE L'AUTEUR : Alphaville, une étrange aventure de Lemmy Caution (ou Alphaville) est un film franco-italien de science-fiction de Jean-Luc Godard sorti en 1965. Il a reçu l'Ours d'or 1965 au Festival international du film de Berlin.

Dans une époque postérieure aux années 1960, les autorités des « pays extérieurs » envoient le célèbre agent secret Lemmy Caution (Eddie Constantine) en mission à Alphaville, une cité déshumanisée, éloignée de quelques années-lumière de la Terre. Caution est chargé de neutraliser le professeur von Braun, tout-puissant maître d'Alphaville, qui y a aboli les sentiments humains. Un ordinateur, Alpha 60, régit toute la ville. Un message de Dickson, un ex-agent secret, ordonne à Lemmy de « détruire Alpha 60 et de sauver ceux qui pleurent ». Mais ce dernier est enlevé, interrogé par Alpha 60 et condamné à mort ...

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : C. Aupérin
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée : Jules Fil (Carcassonne)

Table des matières

I) Trinôme du second degré **1**

II) Résolution des équations du second degré **5**

II.1. Résolution de l'équation $X^2 = a$ 5

II.2. Résolution de $ax^2 + bx + c = 0$ 5

III) Tournons en rond ! **7**

III.1. Retrouver la forme canonique grâce aux racines 7

III.2. Factorisation du trinôme 8

IV) Signe du trinôme **8**

V) Pour aller plus loin **11**

V.1. Exercices originaux mais faisables 11

V.2. Algorithme et programmation 12

L'ESSENTIEL :

- ⇝ Résoudre des équations du second degré.
- ⇝ Etudier le signe d'un trinôme.
- ⇝ Maitriser l'allure de la courbe d'une fonction polynôme du second degré.

« *Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous* »
THURSTON MOORE (SONIC YOUTH)

POLYNÔMES DU SECOND DEGRÉ

Au fil du temps

Nous allons étudier les polynômes du second degré, ie de la forme $ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont des constantes connues (et $a \neq 0$).
La représentation graphique de ce genre de fonction est une parabole, courbe que l'on retrouve dans la nature, comme par exemple la trajectoire des jets d'eau d'une fontaine, des astres, les rebonds d'une balle de tennis, les dunes de sables dans le désert ... Les antennes pour le câble sont également en forme de parabole, d'où leur nom.
On a découvert les paraboles dès l'antiquité, grâce à *Appolonius de Perga*, qui étudiait les sections planes du cône. Au V^{ème} siècle, la pensée mathématique s'épanouit dans le moyen orient, sous l'impulsion géniale d'*Al Khwarizmi*. Son nom est à la base du mot algorithme. En effet, c'est lui qui le premier s'intéressa à mettre en place une méthode générale de résolution d'équations en fonction de leur type.
La nouveauté apportée par Al-Khwarizmi correspond à une véritable évolution des mentalités : il ne s'agit plus de résoudre des problèmes arithmétiques ou géométriques que l'on peut traduire en équations, mais de partir des équations, dont chacune recouvre une classe infinie de problèmes variés.
Il est également le premier à résoudre couramment des équations du second degré dans $\mathbb{R}$. Autrement dit, *Al Khwarizmi* à trouver un algorithme permettant de résoudre toutes les équations de la forme $ax^2 + bx + c = 0$, et lorsque l'on a sur un problème qui aboutit à une telle équation, il n'y a plus qu'à le suivre ! C'est cet algorithme que nous allons découvrir.
Au XVII^e siècle, *Newton* démontre que la trajectoire d'un corps seulement soumis à son poids est une parabole. A cette époque, on sait déjà résoudre depuis environ un siècle les équations du second degré dans un ensemble de nombres que vous découvrirez, contenant $\mathbb{R}$ et de nouveaux nombres, appelés imaginaires (par opposition à réels) ou encore complexes.

I) Trinôme du second degré

Travail de l'élève **1.** Un rectangle a pour périmètre P = 21 m et pour aire S = 27 m^2. Quels sont les dimensions de ce rectangle ?

Objectifs et commentaires :

- ⇝ Faire modélisation la situation aux élèves :
  Poser x et y les dimensions de ce rectangle, et obtenir : $x + y = 21$ et $xy = 27$
- ⇝ Manipuler les écritures littérales et le système pour aboutir à l'équation $x^2 - 10.5x + 27 = 0$
- ⇝ Les faire s'interroger sur les diverses manières de résoudre une telle équation.
  Graphiquement ? Tableau de valeurs ? Calculs ?

Solution :

La recherche à tâtons ici n'est pas si simple, les élèves ne pensant qu'aux nombres entiers ...

La nécessité de modéliser se fera donc sentir.

Modélisation : Soient x et y les dimensions de ce rectangle, on obtient :

$$x+y=\frac{P}{2}=10,5 \quad \text{et} \quad xy=S=27$$

En remplaçant y par $10,5-x$ on obtient l'équation $x(10,5-x)=27$ qui peut s'écrire encore $x^2-10,5x+27=0$.

Comment résoudre une telle équation ?

Notons f la fonction *trinôme* définit par $f(x)=x^2-10,5x+27$ et étudions cette fonction.

Graphiquement : On trace la représentation graphique de la fonction f et on regarde les abscisses des points où cette courbe coupe l'axe des abscisses.

Critique : peu rigoureux.

Faire remarquer aux élèves qu'on peut vérifier l'exactitude des solutions par le calcul.

De plus, leurs connaissances sur les trinômes peuvent cependant leur permettre d'affirmer qu'on trouve ainsi toutes les solutions du problème.

Tableau de valeurs : On fait un tableau de valeurs de la fonction f et on cherche les solutions.

Mêmes remarques que précédemment sur le nombre de solutions.

Par le calcul, en utilisant la forme canonique :

$$\begin{aligned} x^2-10,5x+27=27 &\iff x^2-10,5x=0 \\ &\iff x(x-10,5)=0 \\ &\iff x=0 \quad \text{ou} \quad x=10,5 \end{aligned}$$

On en déduit que $\alpha=\dfrac{0+10.5}{2}=\dfrac{21}{4}$ Et $\beta=f\left(\dfrac{21}{4}\right)=-\dfrac{9}{16}$. Donc

$$f(x)=\left(x-\frac{21}{4}\right)^2-\frac{9}{16}$$

A partir de la forme canonique du trinôme f on résout l'équation $x^2-10,5x+27=0$:

$$\begin{aligned} x^2-10,5x+27=0 &\iff \left(x-\frac{21}{4}\right)^2-\frac{9}{16}=0 \\ &\iff \left(x-\frac{21}{4}\right)^2=\frac{9}{16} \\ &\iff x-\frac{21}{4}=\frac{3}{4} \quad \text{ou} \quad x-\frac{21}{4}=-\frac{3}{4} \\ &\iff x=\frac{24}{4}=6 \quad \text{ou} \quad x=\frac{18}{4}=4.5 \end{aligned}$$

De plus si $x=6$ alors $y=10,5-6=4,5$. Le rectangle a donc pour dimensions 4 et 6.5.

Et si $x=\dfrac{18}{4}=4,5$ alors $y=10,5-4,5=6$. On retrouve les mêmes dimensions (les rôles de x et y étant symétriques).

Conclusion : Le rectangle d'aire $S=27$ et de périmètre 21 a pour longueur 6 et pour largeur $4,5$.

But du chapitre : On cherche un algorithme qui automatiserait ce genre de démarche.

Définition 1.

On appelle **polynôme du second degré** ou encore **trinôme** toute expression pouvant s'écrire ax^2+bx+c où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$

Exemples :

1. $x^2-4x+1 \qquad (a=1; b=-4; c=1)$
2. $-7x^2+4x \qquad (a=-7; b=4; c=0)$
3. $\sqrt{2}x^2 \qquad (a=\sqrt{2}; b=0; c=0)$
4. $(x+1)^2 \qquad (a=1; b=2; c=1)$

Contre-Exemple :

1. $3x+1$ est un binôme du premier degré
2. x^3+2x+3 est un polynôme du $3^{ème}$ degré
3. $(x+1)^2-x^2$ est un binôme du premier degré.
4. $2x^2+\dfrac{1}{x}$ n'est pas un trinôme du 2^{nd} degré.

Propriété 1.

Soit $\mathrm{P}(x) = ax^2+bx+c$ et $\mathrm{Q}(x) = a'x^2+b'x+c'$ deux trinômes.

P et Q sont égaux si, et seulement si $\begin{cases} a=a' \\ b=b' \\ c=c' \end{cases}$

Remarque : On dit que $\mathrm{P}=\mathrm{Q}$ si, et seulement si $\mathrm{P}(x)=\mathrm{Q}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Preuve

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que $\begin{cases} a=a' \\ b=b' \\ c=c' \end{cases}$. Il est alors clair que $\mathrm{P}=\mathrm{Q}$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons maintenant que $\mathrm{P}=\mathrm{Q}$.
On a alors : $ax^2+bx+c = a'x^2+b'x+c', \quad \forall x \in \mathbb{R}$
Si l'égalité est vraie pour tout réel x, elle l'est en particulier pour $x=0$.
On obtient alors que $c=c'$.
L'égalité devient donc :

$$ax^2+bx = a'x^2+b'x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

En particulier, si on choisit $x=1$ on obtient : $a+b=a'+b'$
Si on choisit maintenant $x=-1$ on obtient : $a-b=a'-b'$
On a donc le système $\begin{cases} a+b=a'+b' \\ a-b=a'-b' \end{cases}$ formé par les deux conditions trouvées sur les coefficients.

Preuve (Suite)

En ajoutant membre à membre les deux lignes, on obtient : $2a = 2a' \iff a = a'$.
En soustrayant désormais membre à membre les deux lignes, on obtient : $2b = 2b' \iff b = b'$.

Donc si $\mathrm{P} = \mathrm{Q}$ alors $\begin{cases} a = a' \\ b = b' \\ c = c' \end{cases}$ Au final, on a montré que : $\mathrm{P} = \mathrm{Q} \iff \begin{cases} a = a' \\ b = b' \\ c = c' \end{cases}$

CQFD

Exemple :

Soient $\mathrm{P}(x) = x^2 - x - 1$ et $\mathrm{Q}(x) = \left(x - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$. Démontrer que $\mathrm{P} = \mathrm{Q}$

On dit que Q est la forme factorisée de P.

Définition 2.

Soit $\mathrm{P}(x) = ax^2+bx+c$ un trinôme. On appelle **racine** de P toute valeur de la variable x solution de l'équation du second degré :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Exemples :

1. $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ sont des racines du trinôme de l'exemple précédent.
2. Vérifier que 3 est racine du trinôme $2x^2 - 5x - 3$. En a-t-il d'autre(s) ? En déduire sa forme factorisée.
3. Trouver les racines du polynôme $x^2 - 7 = 0$

Question :

D'une manière générale, comment trouver les racines du polynôme $ax^2 + bx + c$? Existe-t-il un algorithme permettant de trouver toutes les racines de n'importe quel trinôme ?

Exercice(s) du livre : Repère : n° 58 p 32 et 66 p 34 (détermination des coefficients à partir de trois images)

II) Résolution des équations du second degré

II.1. Résolution de l'équation $X^2 = a$

Propriété 2.

L'équation $X^2 = a$ admet :
- 2 solutions si $a > 0$: $X_1 = \sqrt{a}$ ou $X_2 = -\sqrt{a}$.
- 1 solution si $a = 0$, il s'agit de $X = 0$.
- 0 solution si $a < 0$.

Exemples :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $2x^2 - 3 = 0$; **2.** $(4x+1)^2 - 1 = 0$; **3.** $3(x-1)^2 = 7$; **4.** $(x+1)^2 + 1 = 0$

Exercice 1 : « Canoniser » le trinôme $x^2 - 7x + 12$, établir son tableau de variations et déterminer ses éventuelles racines.

II.2. Résolution de $ax^2 + bx + c = 0$

***Travail de l'élève* 2.**

L'objectif de cette activité est de déterminer les éventuelles racines d'un trinôme dans le cas général.

On sait que tout trinôme $T(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) admet une forme canonique du type $a(x-\alpha)^2 + \beta$ et on a déjà vu deux méthodes pour retrouver cette forme.

Je rappelle que cette forme nous est utile pour déterminer le tableau de variations du trinôme, ainsi que ses éventuelles racines.

1. **Détermination de α et β en fonction de a, b et c :**
   - **a.** Développer l'expression $a(x-\alpha)^2 + \beta$ et l'ordonner suivant les puissances de x.
   - **b.** En déduire que $T(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta \iff \begin{cases} \alpha = -\dfrac{b}{2a} \\ \beta = \dfrac{4ac - b^2}{4a} \end{cases}$
2. **Etablissement d'une condition sur a, b et c pour l'existence de racines :**
   - **a.** Montrer que $T(x) = 0 \iff (x-\alpha)^2 = -\dfrac{\beta}{a}$
   - **b.** Déduire des questions précédentes que $T(x) = 0 \iff \left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}$
   - **c.** On note Δ le nombre $b^2 - 4ac$. On a donc montrer que
   $$T(x) = 0 \iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$
   Conclure sur le nombre de solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ en fonction du signe de Δ
3. **Détermination des éventuelles racines :**
   - **a.** Déterminer la racine du trinôme quand $\Delta = 0$ en fonction de a et b.

b. Déterminer les racines du trinôme quand $\Delta > 0$ en fonction de a, b et Δ.

c. Cette dernière formule permet-elle de retrouver la racine quand $\Delta = 0$?

4. **Application :** Trouver les éventuelles racines réelles du trinôme $2x^2 - 4x - 1$.

Définition 3. (Discriminant)

On appelle **discriminant** de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ (avec $a \neq 0$) le nombre réel, noté Δ, qui vaut :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Théorème 1.

On cherche à résoudre l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

1. Si $\Delta < 0$: l'équation n'a pas de solution réelle
2. Si $\Delta = 0$: l'équation a une solution $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$
3. Si $\Delta > 0$: l'équation a deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Preuve

- Cf Activité

Exemples :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $6x^2 + x - 1 = 0$
2. $9 + x^2 + 6x = 0$
3. $\frac{1}{7}x^2 - \frac{1}{7}x - \frac{1}{7} = 0$
4. $x^2 - 5 = 0$
5. $\frac{2}{5}x - \frac{1}{3}x^2 = 1$
6. $x^2 - 2x = 0$

Remarques :

- Les formules obtenues pour $\Delta > 0$ s'étendent à $\Delta \geq 0$.
  En effet dans le cas $\Delta = 0$, on trouve $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$. On parle de « racine double ».
- On appelle T le trinôme défini sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{T}(x) = ax^2 + bx + c$. On a :

$$ac < 0 \Longrightarrow \exists x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ avec } x_1 \neq x_2, \quad \mathrm{T}(x_1) = \mathrm{T}(x_2) = 0$$

Ce qui signifie littéralement :
$ac < 0$ **implique** qu'**il existe** x_1 et x_2 deux nombres réels différents **tels que** T s'annule en x_1 et x_2.
Concrètement cela signifie :
Si les coefficients a et c sont de signes opposés, alors T admet forcément deux racines distinctes.
Ceci est vrai puisque dans ce cas, $\Delta = b^2 - 4ac > 0$. **La réciproque est fausse**.

Astuces

- Si b ou c est nul, on sait déjà résoudre ce genre d'équation, plus rapidement. Il est donc inutile de sortir tout l'attirail appris ici, même s'il donne évidemment les mêmes réponses.
- Lorsque l'on doit résoudre une équation avec des coefficients rationnels, pensez à vous ramener à une équation équivalente à coefficients entiers avant de faire tous les calculs !

Exercice 2 : Déterminer les éventuelles racines réelles des trinômes suivants :

1. x^2-2x-4 **2.** $x^2+10+7x$ **3.** $2x^2-2x+5$

Exercice 3 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $20x-80x^2=130$ **2.** $x^2-x=\dfrac{15}{4}$ **3.** $49x^2+16=56x$

Exercice 4 : Peut-on trouver trois carrés ayant pour côtés des **entiers consécutifs** et dont la somme des aires est $15\,125$? Si oui, préciser quelles sont les valeurs que doivent avoir les côtés.
Même question avec $15\,127$.

Exercice 5 : Trouver deux nombres entiers dont la somme est égale à 57 et le produit à 540.

Exercice(s) du livre : Repère : n° 49-50-59 p 30 (avec paramètre)

III) Tournons en rond !

III.1. Retrouver la forme canonique grâce aux racines

On appelle T une fonction trinôme $\mathrm{T}(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ admettant deux racines distinctes x_1 et x_2.
On a déjà vu que l'axe de symétrie $x=\alpha$ de la parabole $\mathscr{C}$ représentative de T nous permettait de retrouver α à partir de deux points de la courbe de même ordonnée.
Or, $\mathrm{T}(x_1)=\mathrm{T}(x_2)=0$ donc les points $\mathrm{A}(x_1,\mathrm{T}(x_1))$ et $\mathrm{B}(x_2;\mathrm{T}(x_2))$ (qui appartiennent à $\mathscr{C}$) sont symétriques par rapport à l'axe $x=\alpha$.
D'où $\alpha=\dfrac{x_1+x_2}{2}$ et l'on retrouve $\alpha=-\dfrac{b}{2a}$ après simplification.
Pour trouver β, on procède comme avant en disant que $\beta=\mathrm{T}(\alpha)$.

Remarque : Le cas où $\Delta=0$ nous permet aussi de retrouver la forme canonique de T.
En effet, on peut dire que $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$ et on constate que $\alpha=\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{2x_1}{2}=x_1=-\dfrac{b}{2a}$

Lorsque le trinôme n'admet pas de racines, on peut toujours utiliser l'ancienne méthode en résolvant l'équation $\mathrm{T}(x)=c$.
Sinon, dans l'activité précédente, on a également démontré que $\alpha=-\dfrac{b}{2a}$ et $\beta=-\dfrac{\Delta}{4a}$. On a donc :

$$\mathrm{T}(x)=a(x-\alpha)^2+\beta=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}$$

Exercice(s) du livre : Repère : n° 68 à 70 p 34 (lien entre des racines)

III.2. Factorisation du trinôme

Travail de l'élève* 3. *L'objectif de l'activité est de chercher l'éventuelle forme factorisée du trinôme $T(x) = ax^2 + bx + c$.

1. Rappeler la forme canonique de T en fonction des coefficients a et b et de son discriminant Δ.
2. Déterminer la forme factorisée de T si $\Delta = 0$.
3. On se place désormais dans le cas $\Delta \neq 0$.
   - **a.** Factoriser par a la forme canonique de T établie en 1).
   - **b.** A quelle condition nécessaire et suffisante sur Δ peut-on davantage factoriser l'expression trouvée en 2) ?
4. On suppose désormais que cette condition est remplie (et $\Delta \neq 0$).
   - **a.** Que cela implique-t-il sur l'équation $T(x) = 0$?
   - **b.** Factoriser alors l'expression de la question 2) pour montrer que $T(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ où x_1 et x_2 désignent les racines de T.

Théorème 2.

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$. Le trinôme se factorise ainsi :

⇝ Si $\Delta = 0$: $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$

⇝ Si $\Delta > 0$: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ où x_1 et x_2 sont les racines du trinôme

Preuve

Cf Activité ou :

⇝ Si $\Delta = 0$: le trinôme s'écrit, à l'aide de la forme canonique : $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$

⇝ Si $\Delta > 0$ on a $a(x - x_1)(x - x_2) = a\left(x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = ax^2 + bx + c$ après développement.

Remarque : Lorsque $\Delta < 0$, comme le trinôme n'a pas de racine réelle, il faut abandonner l'espoir de pouvoir le factoriser (du moins dans $\mathbb{R}$) sinon, on pourrait trouver des solutions à l'équation produit nulle obtenue.

Exemple :

Etablir la forme factorisée, si elle existe, des trinômes suivants

$$P(x) = 3x^2 + 5x + 1 \qquad Q(x) = 25x^2 + 80x - 64 \qquad \text{et} x^2 - 3x + 5$$

Exercice(s) du livre : Repère : n° 54 à 56 p 32 (expression à partir du graphique)

IV) Signe du trinôme

Travail de l'élève* 4. *L'objectif de l'activité est d'étudier le signe du trinôme $T(x) = ax^2 + bx + c$ ***suivant les valeurs de*** x.

1. Cas 1 : $\Delta > 0$
   Soient x_1 et x_2 les racines de T, avec $x_1 < x_2$.
   a. Rappeler la forme factorisée de T en fonction de a, x_1 et x_2.
   b. Grâce à cette expression, établir le tableau de signes de T en fonction du signe de a .
2. Cas 2 : $\Delta \leqslant 0$
   a. Rappeler la forme canonique de T en fonction de a, b et Δ.
   b. Expliquer pourquoi cette forme est toujours du signe de a.

Théorème 3.

Le trinôme $ax^2 + bx + c$ est toujours du signe de a sauf entre les racines lorsqu'elles existent. En particulier, lorsque $\Delta < 0$, le trinôme est de signe constant.

Preuve

Si $\Delta > 0$ on a $\mathrm{T}(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ et

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x - x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - x_2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x - x_1)(x - x_2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\mathrm{T}(x)$		signe de a	0	opposé de a	0	signe de a	

Sinon,

$$\mathrm{T}(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

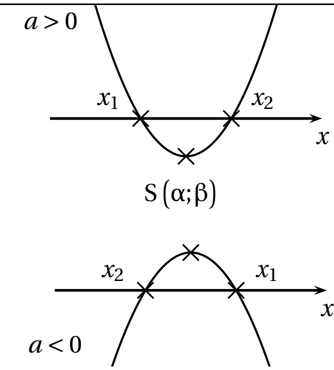
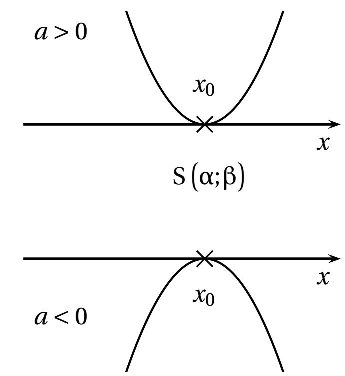
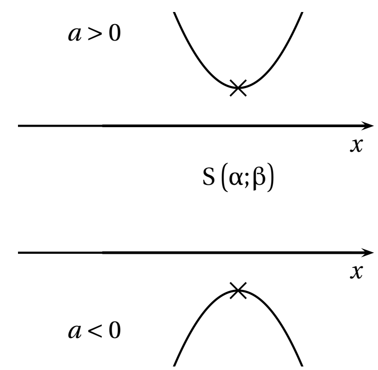
Comme Δ est négatif, l'expression entre crochets est positive, le signe de $\mathrm{T}(x)$ est donc le même que celui de a pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exemple :

Résoudre les inéquations suivantes

$$x^2 - 4x + 1 \leqslant 0 \qquad 3x^2 \leq 4x \qquad 7x^2 - 3x + 2 > 0$$

Résumé sur $\mathrm{P}(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$: On note $\Delta = b^2 - 4ac$ Et on a $\mathrm{P}(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = -\dfrac{\Delta}{4a}$

<table>
<tr><th>Δ</th><th>Factorisation</th><th>Racines</th><th>Signe de $\mathrm{P}(x)$</th><th>Parabole</th></tr>
<tr><td>$\Delta > 0$</td><td>$a(x-x_1)(x-x_2)$</td><td>Deux racines :
$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$</td><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>x_1 ou x_2</td><td></td><td>x_2 ou x_1</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>Signe de $\mathrm{P}(x)$</td><td></td><td>Signe de a</td><td>0</td><td>Opposé de a</td><td>0</td><td>Signe de a</td><td></td></tr>
</table>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$\Delta = 0$</td><td>$a(x-x_0)^2$</td><td>Une racine :
$x_0 = \dfrac{-b}{2a}$</td><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>x_0</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>Signe de $\mathrm{P}(x)$</td><td></td><td>Signe de a</td><td>0</td><td>Signe de a</td><td></td></tr>
</table>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$\Delta < 0$</td><td>pas
de
factorisation</td><td>Aucune
racine
réelle</td><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>Signe de $\mathrm{P}(x)$</td><td></td><td>Signe de a</td><td></td></tr>
</table>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Exercice 6 : Résoudre les (in)équations suivantes :

1. $-3x^2-5x\leq 0$
2. $\sqrt{a+1}=2a-3$
3. $\dfrac{2z-5}{z-1}=\dfrac{z-1}{z+1}$
4. $(t^2+2t+1)^2<16$
5. $\dfrac{3b^2+b+1}{b^2-3b-10}>0$
6. $(2s+1)(5-s)<(5-s)(s+4)$

Exercice 7 : Soit f une fonction définie par $f(x)=-3x^2+2x+1$ pour tout réel x.
On note C_f sa représentation graphique dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$

1. Préciser la nature de la courbe C_f et les coordonnées de son sommet S
2. Montrer que la courbe coupe l'axe des abscisses en deux points A et B dont on déterminera les coordonnées.
3. Pour quelles valeurs de x la courbe est-elle située au dessus de l'axe des absisses ?

Exercice 8 : Soit u une fonction u. polynôme de degré 2. On donne son tableau de variations ci-dessous.

x	$-\infty$	1	4	$\cdots$	$+\infty$
Variations de u	$\nearrow$	0	18	0	$\searrow$

1. Déterminer la seconde racine de u.
2. Déterminer a.
3. Etablir les tableaux de variations des fonctions $g=\sqrt{u}$, $h=\dfrac{1}{u}$ et $k=|u|$ sur le plus grand ensemble possible.

Exercice(s) du livre : Repère : n° **75** p 36 (signe d'un trinôme)
Positions relatives : **79** p 37 (retrouver les expressions de f et g en plus) + **80** p 37
Corriger le DM 3bis
Proba : 72-**82** p 205 (espérance de degré 2) + **52-53** p 247 (paramètres de loi binomiale à partir de l'écart type)
Trigo : **121**-124 p 295

V) Pour aller plus loin

V.1. Exercices originaux mais faisables

Exercice 9 :

1. f est le polynôme défini par $f(x)=4x^3+2x^2-2x-1$
   a. Déterminer les réels a, b et c tels que $\forall x\in\mathbb{R}$, on ait $f(x)=(2x+1)(ax^2+bx+c)$.
   b. Résoudre alors l'équation $f(x)=0$
   c. Etablir le tableau de signe de f.
2. a. Trouver une racine évidente x_0 de $g(x)=x^3-x^2-14x+24$.
   b. Déterminer alors les réels a, b et c tels que $\forall x\in\mathbb{R}$, on ait $g(x)=(x-x_0)(ax^2+bx+c)$.
   c. Résoudre $x^3-x^2-14x+24\leq 0$

Exercice 10 : Résoudre l'équation : $6x^4 - 5x^2 + 1 = 0$

*Indication : Poser $X = x^2$ (ce type d'équation s'appelle une équation **bicarré**)*

Exercice 11 : Résoudre l'équation : $x + x^3 + x^5 + x^7 = 0$

Indication : Peut-il y avoir une solution réelle strictement négative ? Et strictement positive ?

V.2. Algorithme et programmation

Un peu d'histoire

Dans l'antiquité, les mathématiques sont utilisées pour les besoins quotidiens, tels que des calculs d'aires de champs, d'impôts lors des crues du Nil, de constructions. Elles servent aussi à résoudre des problèmes dans lesquels figure une (ou plusieurs) quantité inconnue à trouver.

Vers 1800-1500 avant JC, les Babyloniens savent déjà résoudre des équations du 1^{er} et du 2^{nd} degré. On parle de "chose" à trouver et on suit un discours logique phrasé (peu clair pour nous aujourd'hui) pour arriver à une solution.

Ce n'est qu'au VIII^e siècle, avec l'introduction de la numération positionnelle, des chiffres arabes et du zéro, que la théorie générale prend place peu à peu. Le point de départ est de désigner dans des calculs l'inconnue par un symbole (aujourd'hui souvent la lettre x) puis de mettre en équation les problèmes.

Rapidement, on comprend l'intérêt d'une telle méthode. C'est *Al-Khawarizmi* qui le premier s'intéresse à cela et classifie les différents types d'équations, afin que dans chaque problème, on n'ait plus qu'à reconnaitre le type d'équation et suivre la méthode générale appropriée, menant à la solution. Le mot ***algorithme*** découle de son nom et désigne aujourd'hui ***une procédure à suivre, à partir d'un élément donné, pour arriver à une solution unique***.

Jusqu'au début du XIX^e, trouver des algorithmes de résolutions d'équations constituent la préoccupation principale des algébristes. Ils développent la notation symbolique et la conventionnent : au XVI^e Viete sépare l'alphabet en deux, le début désignant plutôt les paramètres, la fin les inconnues, ce qui est encore utilisé de nos jours. On catégorise les équations suivants leurs paramètres, leur degré et leur nombre d'inconnues, afin de généraliser le plus possible leur résolution.Parallèlement, la notion de fonction prend forme.

Les équations de degré 3 sont résolues par les italiens Tartaglia et Cardan au XVI^e siècle, et celles de degré 4 par l'élève de ce dernier, Ferrari. L'histoire des formules de résolution s'arrête là, car le français Evariste Galois (1811-1832) montre au XIX^e qu'il est impossible de trouver des formules de résolution pour les équations de degré supérieur ou égal à 5.

Exemple : Vocabulaire, démarche et rédaction

On souhaite un algorithme qui donne le type d'extremum d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, sa valeur approchée et quand il est atteint.

1. **Analyse préliminaire**
   - **a.** Quelles sont les informations initiales dont nous avons besoin ?
     On les appelle les *entrées* de l'algorithme.
   - **b.** Quelle condition avons-nous sur l'une de ces entrées ?
   - **c.** Que doit-on calculer ?
     On prendra l'habitude de faire afficher le(s) résultat(s) de l'algorithme, que l'on appelle *sortie(s)*.
     L'ensemble des données de l'algorithme pouvant variées (entrées-sorties) sont les *variables*.

2. **Compréhension de l'algorithme :** Compléter l'algorithme suivant

Algorithme 1 : *Extremum d'un trinôme*

```
Variables
    ...., ...., ...., ...., .... sont des nombres réels

Début
    Saisir ....
    Tant que ( ......... ) Faire
        Afficher "Erreur : ......................................................"
        Saisir ....
    Fin Tant que
    Saisir ........ et ........
    Affecter à ........ la valeur .....
    Affecter à ........ la valeur .....
    Si ( ........ ) Alors
        Afficher "La fonction f admet pour ............ "
    Sinon
        Afficher "La fonction f admet pour ............ "
    Fin Si
    Afficher ...... " atteint en " ......
Fin
```

3. **La programmation : sur Algobox et sur TI**
   Trouver comment programmer cet algorithme sur Algobox et sur votre calculatrice (ie avec le vocabulaire adapté au support) .

Exercice 12 : Ecrire un algorithme qui donne la valeur du Δ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2+bx+c$, ainsi que son nombre de racines éventuelles et leurs valeurs.
Le programmer sur votre calculatrice.

Hors Programme : polynômes de degré quelconque

Remarque : Le vocabulaire découvert ici est le même que celui employé pour un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$ quelconque, ie de la forme

$$\mathrm{P}(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \text{ où } a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_n \text{ sont des réels avec } a_n \neq 0$$

- ⇝ Les éventuelles solutions de l'équation $\mathrm{P}(x) = 0$ s'appellent encore les racines de P.
- ⇝ Le discriminant (s'il existe, ie si $n \geq 4$) se notera encore Δ, mais s'obtiendra par une autre formule.

On peut également démontrer que deux polynômes sont égaux si et seulement s'ils ont le même degré et les mêmes coefficients.
Enfin si x_1 est une racine de P, alors on peut montrer que P est factorisable par $(x - x_1)$.

Exemple :

- La fonction P définie par : $P(x) = x^8 - 6x^7 + 3x^2 - 5$ est une fonction polynôme de degré 8
- Toutes les fonctions puissances d'exposants entiers : $P(x) = x^p$ avec $p \in \mathbb{N}$ sont des fonctions polynômes de degré p.
- Les fonctions affines et constantes (différente de la fonction nulle) sont des fonctions polynômes de degré 1 et 0

Contre-Exemple :

- La fonction Q définie par $Q(x) = x^3 + \dfrac{2}{x}$ n'est pas une fonction polynôme
- La fonction g définie par $g(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$ n'est pas une fonction polynôme car non définie pour $x = 1$ ou $x = -1$
- En revanche la fonction h définie par $h(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x^2 + 1}$ est une fonction polynôme de degré 2 puisque $h(x) = x^2 - 1$

Exemple :

Trouver les racines du polynôme P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = (x-1)(x^2 - x - 1)$

Remarque :

- Les fonctions polynôme de degré 1 ($x \longmapsto ax + b$) admettent toutes une seule racine $\lambda = -\dfrac{b}{a}$
- Certaines fonctions polynômes n'ont aucune racine réelle, par exemple P avec $P(x) = x^2 + 1 \geq 1$.

« La physique est bien trop dure pour les phycisiens »

DAVID HILBERT, mathématicien