EXERCICES : LOGARITHME, EXPONENTIELLE, DÉRIVÉES

ANTILLES JUIN 2010 (Exercice 3) **8 points**

On s'intéresse à l'évolution d'une culture de bactéries de la salmonellose pendant deux heures.

Une étude expérimentale permet d'estimer que le nombre de ces bactéries, en fonction du temps t exprimé en minutes, est donné par :

$$N(t) = 100 \times (1,02)^t$$

1. On admet que la fonction N a le même sens de variation que la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,120]$ par $f(t) = (1,02)^t$.

Préciser le sens de variation de f puis celui de N sur l'intervalle $[0\,;\,120]$.

2. **a.** Reproduire et compléter le tableau de valeurs suivant, en arrondissant les valeurs à l'unité :

t	0	20	40	60	80	100	120
$N(t)$			221				

b. Construire sur du papier millimétré, la courbe représentative de N dans un repère orthogonal d'unités graphiques :

1 cm pour 10 min sur l'axe des abscisses,
1 cm pour 100 bactéries sur l'axe des ordonnées.

3. **a.** Préciser le nombre initial de bactéries.

b. Calculer le nombre de bactéries au bout de 1 h 10 min. Vérifier ce résultat graphiquement. On laissera apparentes les constructions nécessaires.

4. Résoudre algébriquement l'équation $N(t) = 800$. Interpréter ce résultat.

5. Soit $N'(t)$ la dérivée de N sur l'intervalle $[0\,;\,120]$.

On admet que la vitesse d'augmentation de cette population à l'instant t est donnée en bactéries par minutes par $N'(t)$.

a. Construire « au jugé » la tangente à la courbe représentative de N au point d'abscisse 70.

b. Par lecture graphique, estimer le coefficient directeur de cette tangente.

c. En déduire une valeur approchée de la vitesse d'augmentation de la population de bactéries au bout de 1 h 10 min.

LA RÉUNION JUIN 2010 (Exercice 1) **5 points**

Une compagnie d'assurance estime que la valeur marchande d'une machine achetée 2 000 euros le 1$^{\text{er}}$ janvier 2010 baisse de 18 % par an.

1. Recopier et compléter le tableau suivant en arrondissant au centime d'euro si nécessaire :

Année	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Valeur (en euros)	2 000				904,24				

2. Montrer que ces valeurs sont les termes d'une suite géométrique dont on précisera la raison.

3. On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,18]$ par

$$f(t) = 2\,000 \times (0,82)^t.$$

On admet que f a les mêmes variations sur $[0$ é $;\,18]$ que la fonction qui à t associe $(0,82)^t$. Quel est le sens de variation de la fonction f sur $[0\,;\,18]$?

4. Résoudre, par le calcul, l'inéquation : $f(t) \leqslant 500$.

5. En déduire à partir de quelle année la valeur marchande de la machine est inférieure ou égale au quart de sa valeur initiale. Est-ce cohérent avec le tableau de la question 1 ?

NOUVELLE CALÉDONIE NOVEMBRE 2009 (Exercice 3) — 7 points

Un laboratoire pharmaceutique étudie l'effet d'une nouvelle molécule d'antibiotique sur un rat auquel on a injecté des bactéries.

Partie A

L'évolution du nombre de bactéries (en millions) présentes dans un échantillon de sang en fonction du temps t (en jours), est donnée par la fonction f définie sur $[0\,;\,1]$ par :

$$f(t) = t^3 + t^2 + 0,5.$$

La courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f est représentée dans l'annexe (à joindre à la copie).

La fonction f', dérivée de la fonction f, exprime la vitesse de prolifération des bactéries à un instant donné.

1. Déterminer $f'(t)$.

2. Calculer $f'(0,5)$ et l'interpréter en terme de vitesse de prolifération des bactéries.

Partie B

1. *Question de cours :*
On appelle g la fonction définie sur $[1\,;\,10]$ par

$$g(t) = 0,8^t.$$

Donner, en justifiant, les variations de g.

2. Au bout d'une journée, on administre à l'animal sa première dose d'antibiotique.
On estime que le nombre de bactéries (en millions) présentes dans un échantillon de sang, en fonction du temps (en jours), est donnée par la fonction h, définie sur $[1\,;\,10]$ par :

$$h(t) = 3 \times (0,8)^t + 0,1$$

a. En admettant que g et h ont le même sens de variation, dresser le tableau de variations de la fonction h sur $[1\,;\,10]$.

b. Reproduire et compléter le tableau suivant en donnant les résultats à 10^{-1} près.

Temps t en jours	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nombre de bactéries en millions			1,6						0,5	

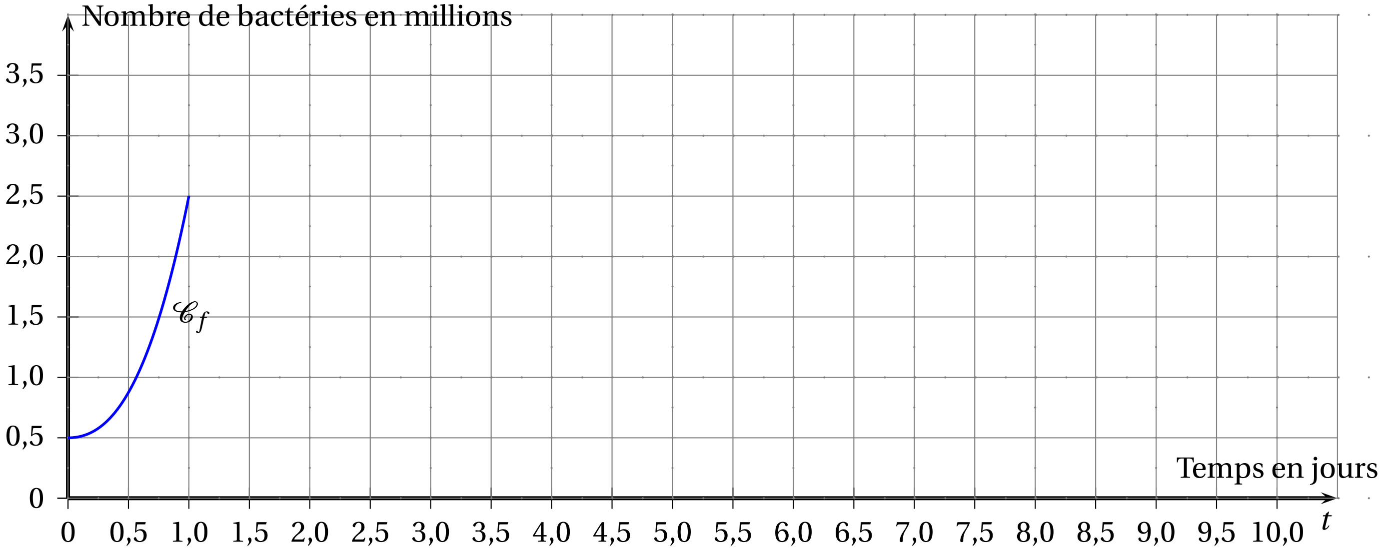
c. Construire, *dans le repère donné en annexe*, la représentation graphique $\mathscr{C}_h$ de la fonction h.

d. On considère que l'animal est en bonne voie de guérison quand la quantité de bactéries présentes dans l'échantillon devient inférieure à 1 million.

Au bout de combien de jours, après le début du traitement, peut-on considérer l'animal en voie de guérison ?

Toute méthode présentée avec cohérence sera acceptée.

Annexe à rendre avec la copie (exercice 3)



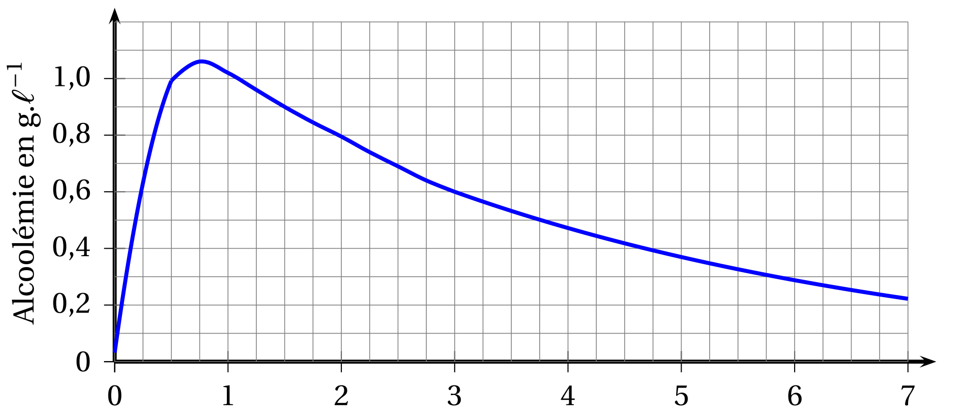
MÉTROPOLE SEPTEMBRE 2011 (Exercice 3) **9 points**

Lorsque l'on consomme de l'alcool, le taux d'alcool dans le sang varie en fonction du temps écoulé depuis l'absorption.

On appelle « alcoolémie » le taux d'alcool dans le sang ; l'alcoolémie est souvent mesurée en grammes par litre (g.ℓ^{-1}).

Un homme de 80 kg a bu un double whisky et deux verres de vin, ce qui correspond à 60 g d'alcool.

Le graphique ci-dessous représente l'évolution de son alcoolémie en fonction du temps t, exprimé en heures, écoulé depuis l'absorption d'alcool.



Partie A :

Dans cette partie, les résultats seront déterminés graphiquement.

1. Au bout de quel temps t l'alcoolémie de l'homme est-elle maximale ? Donner une valeur approchée de cette alcoolémie.
2. Le code de la route en vigueur autorise la conduite avec une alcoolémie maximale de 0,5 g.ℓ^{-1}. Sachant que l'homme doit faire un long trajet pour rentrer chez lui, au bout de combien de temps pourra-t-il prendre sa voiture sans être en infraction ?

Partie B :

On appelle f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;7]$ qui est représentée par la courbe utilisée dans la partie A.

1. L'expression de la fonction f sur l'intervalle $[3\,;7]$ est donnée par :

$$f(t) = 1,25 \times 0,8^t - 0,04.$$

   a. Déterminer par le calcul l'alcoolémie de l'homme au bout de 4 h 30 min, puis son alcoolémie au bout de 6 h 15 min. Donner la valeur approchée arrondie à 10^{-2} de chacun des résultats.

   b. Résoudre, sur l'intervalle $[3\,;7]$, l'inéquation

$$1,25 \times 0,8^t - 0,04 < 0,5.$$

   Interpréter ce résultat.

2. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.
   L'expression donnée plus haut pour la fonction f sur l'intervalle $[3\,;7]$ ne convient pas pour l'intervalle $[0\,;1]$. L'allure de la courbe de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;1]$ fait penser à la représentation graphique d'une fonction du second degré.
   Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par :

$$g(t) = -1,92t^2 + 2,88t + 0,032.$$

   Etudier les variations de cette fonction sur l'intervalle $[0\,;1]$.
   L'expression $-1,92t^2 + 2,88t + 0,032$ pourrait-elle convenir pour $f(t)$ sur l'intervalle $[0\,;1]$?

La Réunion juin 2010 (Exercice 3) **9 points**

Partie A

Le ministère de la santé charge une agence de publicité de faire une campagne de promotion pour un nouveau remède. Une étude prouve que la fréquence $f(t)$ de personnes connaissant le nom de ce remède après t semaines de publicité est donnée par :

$$f(t) = \frac{3t}{3t+2} \quad \text{avec } t \geqslant 0.$$

1. Calculer $f(2)$.

2. En déduire le pourcentage de personnes qui ignorent le nom de ce remède au bout de deux semaines.

3. Comment peut-on interpréter la valeur de l'image de 0 par f ?

Partie B

Une représentation graphique $\mathscr{C}$ de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;18]$ est donnée en annexe dans un repère orthogonal.

Unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées.

1. On admet que f est dérivable sur $[0\,;18]$ et que sa dérivée est donnée par $f'(t) = \dfrac{6}{(3t+2)^2}$.

Etudier les variations de la fonction f sur $[0\,;18]$.

2. Calculer le nombre dérivé de f en $t = 1$.

3. T est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 1. Quel est son coefficient directeur ?

4. Tracer T sur la feuille annexe (à rendre avec la copie).

5. Tracer les droites D d'équation $y = 0,90$ et D' d'équation $y = 0,95$.

Déterminer graphiquement le nombre de semaines de campagne nécessaires pour que 90 % de la population connaisse le nom du remède.

Combien de semaines sont nécessaires pour passer de 90 % à 95 % ?

On laissera les traits de construction apparents.

6. Le ministère a décidé d'arrêter la campagne au bout de six semaines. Justifier ce choix.

Annexe à rendre avec la copie : Exercice 3

Représentation graphique $\mathscr{C}$ de la fonction f (exercice 3) :