CHAPITRE 3

DÉRIVÉES DE FONCTIONS

HORS SUJET

TITRE : « Larmes »

AUTEUR : MAN RAY

PRÉSENTATION SUCCINTE DE L'AUTEUR : Man Ray, né Emmanuel Rudzitsky en 1890, à Philadelphie, est un peintre, photographe et réalisateur de films, acteur du dadaïsme à New York, puis du surréalisme à Paris.

Sa carrière commence à New York, avec son ami proche Marcel Duchamp. Ils forment la branche américaine du mouvement Dada. Après quelques expériences artistiques infructueuses, Man Ray conclut que « Dada ne peut pas vivre à New York ».

En 1921 Man Ray arrive à Paris où il rencontre divers surréalistes. Il s'installe dans le quartier du Montparnasse, rencontre et tombe amoureux de la chanteuse française et modèle Kiki de Montparnasse. Man Ray révolutionne l'art photographique.

Avec notamment Max Ernst, Joan Miró et Pablo Picasso, il présente ses oeuvres à la première exposition surréaliste de la galerie Pierre à Paris en 1925. En 1928, il tourne son troisième film Les Mystères du château de Dé.

En 1940, après la défaite de la France, Man Ray s'embarque pour les États-Unis en compagnie du couple Dalí et du cinéaste René Clair. A Hollywood, il reçoit des propositions d'exposition, rencontre une femme, Juliet, et décide de se remettre à peindre.

Man Ray est mort le 18 novembre 1976, à Paris. Inhumé au cimetière du Montparnasse), on peut lire sur sa tombe son épitaphe : « Unconcerned, but not indifferent » (« Détaché, mais pas indifférent »).

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : C. Aupérin
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée : Jules Fil (Carcassonne)

Table des matières

« *Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous* »
THURSTON MOORE (SONIC YOUTH)

LEÇON 3

Dérivées de fonctions

Résumé

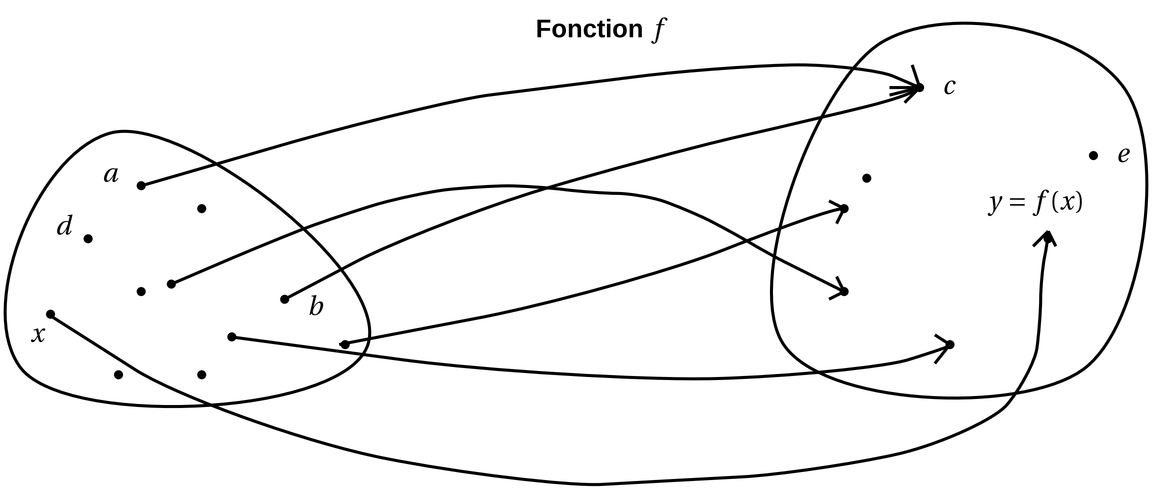
Dans tout le chapitre, le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

I) Généralités sur les fonctions

I-1 Vocabulaire

Définition 1 :
Une **fonction** est un procédé qui fait correspondre à un élément d'un ensemble de départ **au plus** un élément d'un ensemble d'arrivée (donc 0 ou 1 élément).
L'**image** d'un nombre x (de l'ensemble de départ) par la fonction f est **le** nombre $f(x)$ correspondant (dans l'ensemble d'arrivée), s'il existe.
Un **antécédent** d'un nombre y (de l'ensemble d'arrivée) par la fonction f est **un** nombre x (dans l'ensemble de départ) tel que $f(x) = y$, s'il existe.

Remarque : Cette année, on ne s'intéresse qu'aux fonctions qui transforment un nombre réel en un autre.



Ensemble de départ $\mathbb{R}$: antécédents **Ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$: images**

Remarques :

- Un nombre de départ possède 0 ou 1 image par f.
  Ici, a possède une image par f, c'est c. On note $f(a) = c$.
  Tandis que d ne possède pas d'image par f. On dit que d est une **valeur interdite** de f.
  Attention : e n'est pas une valeur interdite !.
- Un nombre de départ ne peut pas avoir plusieurs image à l'arrivée, par contre, plusieurs éléments de départ peuvent avoir la même image à l'arrivée.
  Ici, il ne peut pas y avoir une deuxième flèche partant de a.
  Mais a et b sont tous les deux reliés à c.
- Un élément de l'arrivée peut avoir plusieurs d'antécédents au départ, comme un seul, ou aucun.
  Ici, e ne possède pas d'antécédent par f.
  Par contre, y en possède 1, c'est x. On a donc $f(x) = y$.
  Et, c possède 2 antécédents par f, il s'agit de a et b. On a donc $f(a) = f(b) = c$

Exemples :

Certaines formules apprises en géométrie sont des fonctions : elles associent aux dimensions d'une figure géométrique une unique longueur, aire, volume ...

- La formule du périmètre d'un cercle est la fonction qui à tout nombre positif R associe **le** nombre $2\pi R$.
- La formule de l'aire d'un triangle est la fonction qui à tout couple de nombres positifs $(b; h)$ associe **le** nombre $\dfrac{b \times h}{2}$

Méthodes

Pour trouver l'image d'un nombre par une fonction, on remplace l'inconnue dans l'expression de la fonction par ce nombre et on compte.
Pour trouver les éventuelles antécédents d'un nombre par une fonction, on résoud l'équation avec d'un côté du « = » l'expression de la fonction, de l'autre, le nombre.

Exemple :

Soit la fonction

$$f : \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^2 - 3 \end{array}$$

Déterminer l'image de 3, puis celle de -1.
Déterminer les éventuels antécédents de 12, -3, et de -6.

<u>Exercice 1</u> **:**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^2 + x + 3$.
Calculer l'image de 0, l'image de 1 et l'image de $\sqrt{2}$.
Déterminer le(s) antécédent(s) de 3 par f

Définition 2 :

L'**ensemble de définition** d'une fonction f, noté D_f, est l'ensemble de tous les réels, sauf ceux qui ne possèdent pas d'image par f (appelés valeurs interdites).
Les valeurs interdites sont les valeurs de l'inconnue qui mènent à un calcul impossible dans l'expression de f.
Les calculs impossibles sont la division par 0 et la racine carré d'un nombre négatif.

Exemples :

L'ensemble de définition de la fonction carré est $\mathbb{R}$,car on peut toujours calculer le carré d'un nombre.
Celui de la fonction inverse est $\mathbb{R}^*$, car on nne peut pas diviser par 0.
Celui de la fonction racine carrée est $\mathbb{R}^+$, car on ne peut pas calculer la racine carré d'un nombre négatif.

Exercice 2 **:**

1. Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 - 3x + 1$. Trouver son ensemble de définition.
2. Soit g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{3x-1}{4-x}$. Trouver son ensemble de définition.
3. Soit h la fonction définie par $h(x) = \sqrt{x+1}$. Trouver son ensemble de définition.

Définition 3 :

La **courbe représentative** d'une fonction f définie sur D_f est l'ensemble des points de coordonnées $\big(x; f(x)\big)$ où x parcourt D_f.

Exemple :

Soit la fonction a définie par $a(x) = x^3 - 3x + 1$. Tracer l'allure de sa courbe représentative.

Méthode

Pour vérifier qu'un point $A(x_A; y_A)$ appartient à la courbe représentative d'une fonction f, on remplace l'inconnue dans l'expression de f par x_A, on compte, et on compare avec y_A pour conclure.

I-2 Variations

Définition 4 :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que :

– f est strictement croissante sur I si f conserve l'ordre sur I.
Autrement dit, pour tous réels a et b de I tels que $a < b$, leurs images sont dans le même ordre ($f(a) < f(b)$).

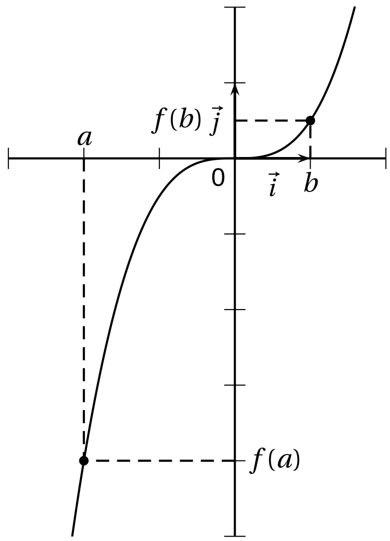
– f est strictement décroissante sur I si f inverse l'ordre sur I.
Autrement dit, pour tous réels a et b de I tels que $a < b$, leurs images sont dans l'ordre inverse ($f(a) > f(b)$).

– f est constante sur I si pour tous réels a et b de I, leurs images sont égales ($f(a) = f(b)$).

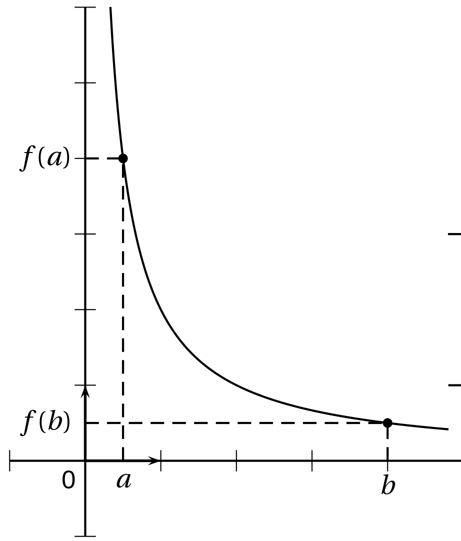
Remarques :

– Graphiquement, une fonction est strictement croissante sur I, si et seulement si sa courbe représentative « monte » sur I
– Graphiquement, une fonction est strictement décroissante sur I, si et seulement si sa courbe représentative « descend » sur I
– Graphiquement, une fonction est constante sur I, si et seulement si sa courbe représentative est une droite parallèle à l'axe des abscisses sur I

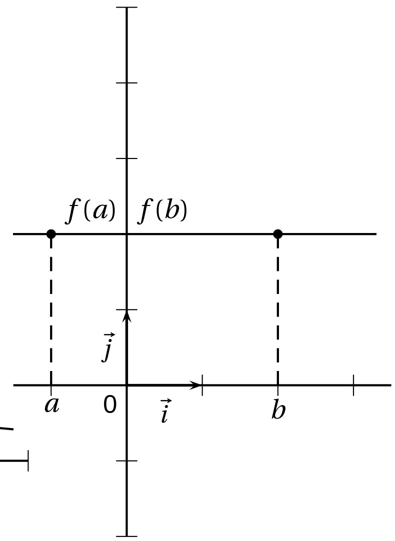
Exemples :



Pour $a < b$ on a $f(a) < f(b)$
f est croissante



Pour $a < b$ on a $f(a) > f(b)$
f est décroissante



Pour $a < b$ on a $f(a) = f(b)$
f est constante

On résume les variations d'une fonction dans des tableaux de variations.

Exemples :

Tableau de variations des fonctions affines

$a < 0$

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{a}$	$+\infty$
Variations de $ax+b$	↘	0	↘
Signe de $ax+b$	$+$	0	$-$

$a > 0$

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{a}$	$+\infty$
Variations de $ax+b$	↗	0	↗
Signe de $ax+b$	$-$	0	$+$

Tableau de variations de la fonction carré

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de x^2	↘	0	↗
Signe de x^2	$+$	0	$+$

Tableau de variations de la fonction inverse

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de $\dfrac{1}{x}$	↘	‖	↘
Signe de $\dfrac{1}{x}$	$-$	‖	$+$

Exercices du livre : Intervalle

n° 82-83 p 107 (associer des tableaux de variations à des courbes représentatives de fonctions et réciproquement)

II) Dérivées

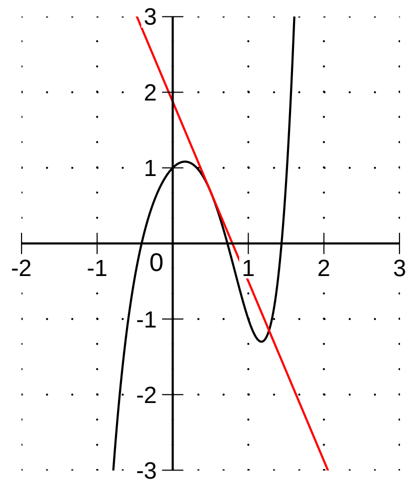
II-1 Tangente et nombre dérivé

Définition 5 : *Tangente*

Beaucoup trop difficile pour être exposée ici, on se contentera de l'idée suivante : la tangente d'une courbe au point d'abscisse A est une droite qui passe par A en frôlant la courbe (sauf pour les droites où la tangente est confondue avec la droite).

Exemple :

Voici une courbe dont nous avons tracé la tangente en $0,5$

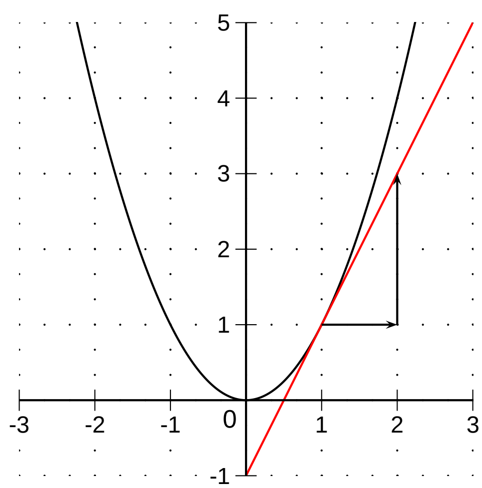


Définition 6 :

(Aspect Graphique)

On dit qu'une fonction f est dérivable en a si elle admet une tangente au point d'abscisse a non verticale .

Le coefficient directeur de cette tangente est alors appelé **nombre dérivée de f en a** et noté $f'(a)$.



Exemple :

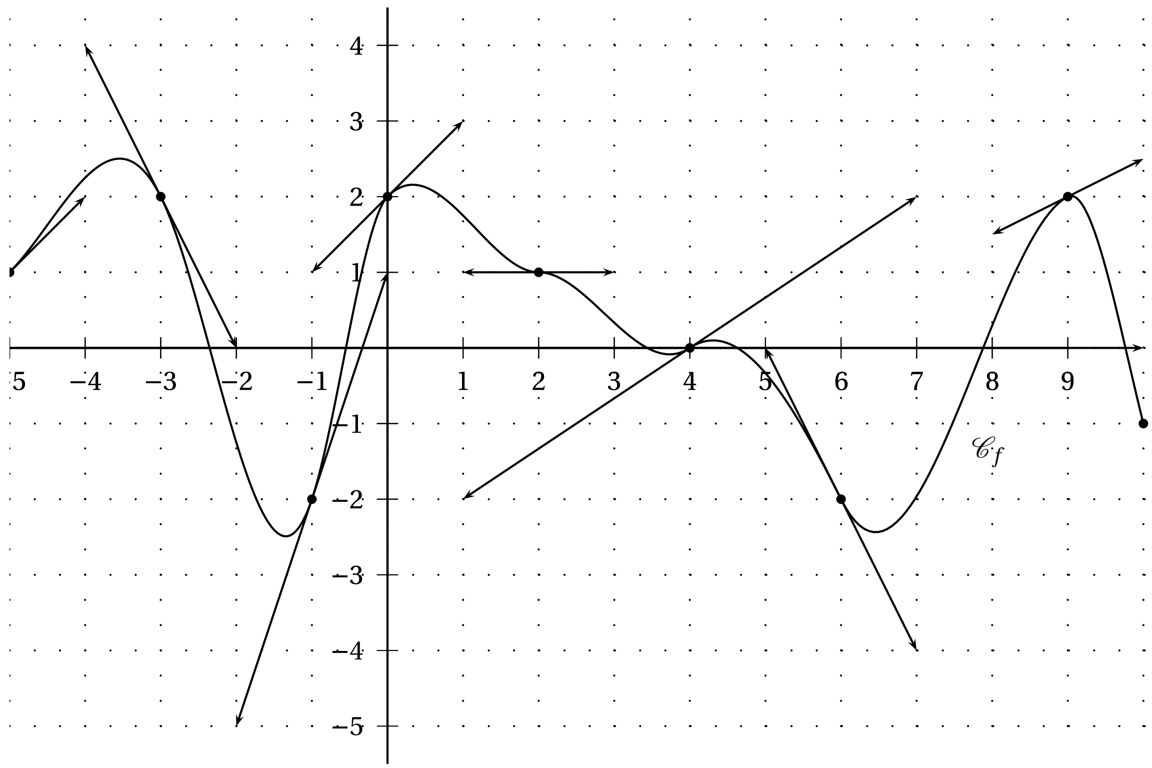
Considérons la courbe de la fonction carrée et sa tangente au point d'abscisse 1. Par lecture graphique on obtient $f'(1) = 2$

Exercice 3 :

La représentation graphique $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f est donnée ci-dessous. En chacun des points indiqués, $\mathscr{C}_f$ admet une tangente qui est tracée.

Lisez, en vous servant du quadrillage, les nombres dérivés :

$$f'(-5) \qquad f'(-3) \qquad f'(-1) \qquad f'(0) \qquad f'(2) \qquad f'(4) \qquad f'(6) \qquad f'(9)$$

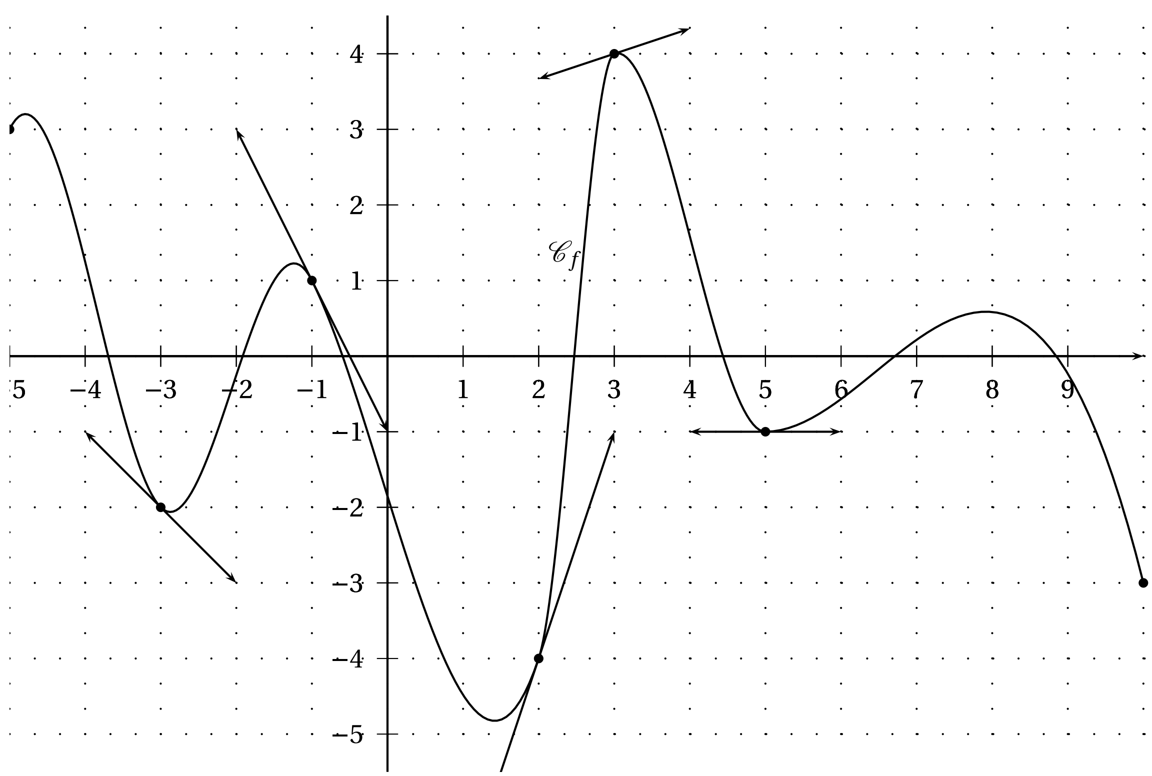


Exercice 4 :

La représentation graphique $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f est donnée ci-dessous. En chacun des points indiqués, $\mathscr{C}_f$ admet une tangente qui est tracée.

Lisez, en vous servant du quadrillage, les nombres dérivés :

$$f'(-3) \qquad f'(-1) \qquad f'(2) \qquad f'(3) \qquad f'(5)$$

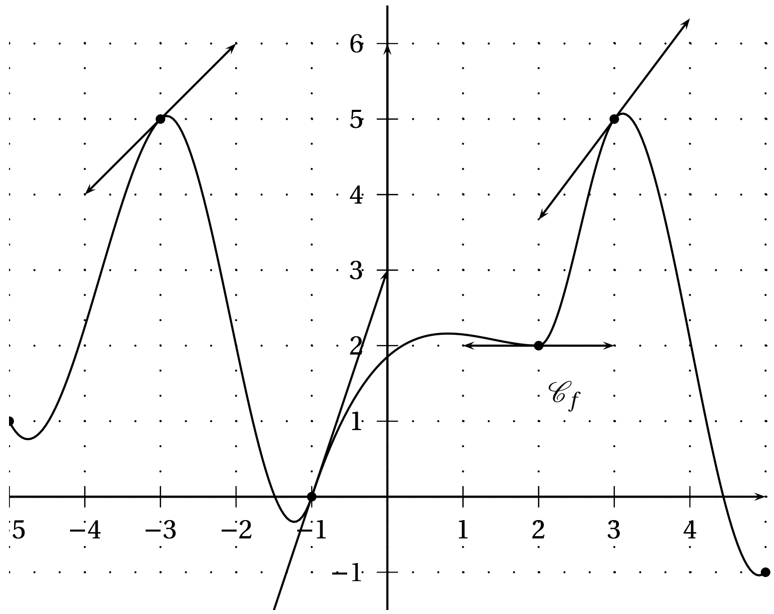


Exercice 5 :

La représentation graphique $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f est donnée ci-dessous. En chacun des points indiqués, $\mathscr{C}_f$ admet une tangente qui est tracée.

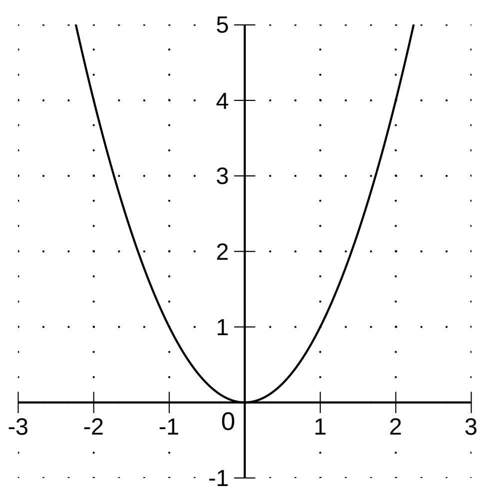
Lisez, en vous servant du quadrillage, les nombres dérivés :

$$f'(-3) \qquad f'(-1) \qquad f'(2) \qquad f'(3)$$



II-2 Fonctions Dérivées

Travail de l'élève **1.** On donne la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction carré $f : x \longmapsto x^2$.



1. Soit A un point de $\mathscr{C}$, d'abscisse a. Que représente $f'(a)$ pour la tangente à $\mathscr{C}$ en A ?
2. Déterminer graphiquement $f'(2)$ où $f(x) = x^2$, puis $f'(0.5)$, $f'(0)$, $f'(-1)$.
3. Conjecturer une formule pour déterminer par le calcul le nombre dérivé de la fonction carré en un point d'abscisse donnée.
4. On désigne par f' la fonction qui, à tout nombre réel x, associe le nombre dérivé de f en x.
   Ainsi, pour tout nombre réel x, on a $f'(x) = 2x$.

a. Calculer $f'(-4)$, $f'(0)$, $f'(10)$ et $f'\left(\dfrac{2}{3}\right)$.

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f'(x) = -2$.
Donner une interprétation graphique du résultat obtenu.

Définition 7 :

On dit qu'une fonction f est dérivable sur un intervalle I lorsque f admet pour tout $x \in I$ un nombre dérivé $f'(x)$.

On appelle alors **fonction dérivée** la fonction notée f', qui a un nombre $x \in I$ associe le nombre $f'(x)$ c'est-à-dire le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse x.

II-3 Dérivées des fonctions de références

Travail de l'élève **2.**

1. Soit f la fonction constante égale à 5 sur $\mathbb{R}$.

a. Quelle est l'allure de sa courbe représentative ?

b. Quelle est le coefficient directeur de la tangente en 3 ? en -2 ? en 0 ?

c. En déduire sa fonction dérivée.

d. Conjecturer la fonction dérivée d'une fonction constante dans le cas général.

2. Mêmes questions pour la fonction affine g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 3x + 1$

Le tableau suivant est admis et à connaître absolument par coeur :

TABLE 1 – Tableau des dérivées des fonctions de références

$f(x)$	$f'(x)$	Domaine de dérivabilité
k (constante)	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
$ax+b$ (affine)	a	$\mathbb{R}$
x^2 (carrée)	$2x$	$\mathbb{R}$
x^3 (cube)	$3x^2$	$\mathbb{R}$
x^n (puissance)	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$ (inverse)	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$
$\sqrt{x}$ (racine)	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^+$

Exemple :

1. Si $f(x) = 3$ alors $f'(x) = 0$ *[formule 1]* : en effet si f est une fonction constante, sa courbe est confondue avec sa tangente de pente nulle.
2. Si $f(x) = x^4$ alors $f'(x) = 4x^3$ *[Formule 6]*

Exercice 6 **:**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ où $f(x) = x^3$

1. Tracer la courbe représentative C_f de la fonction f.
2. On admet que $f'(x) = 3x^2$ (cette formule est à connaître par coeur)
   a. Calculer $f'(0)$; $f'(2)$ et $f'(-1)$.
   b. Tracer les tangentes de f en 0 ; 2 et -1
   c. Trouver l'équation réduite de chacune.

Exercices du livre :

4-7-8-9-11-14 p 101

III) Propriétés

III-1 Opérations sur les fonctions dérivables

Travail de l'élève **3.** p96

Le tableau suivant est admis et à connaître absolument par coeur.
u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k est un nombre réel.
Remarquons que les fonctions ci-dessous sont dérivables sur I.

TABLE 2 – Opérations sur les dérivées

Fonctions	Dérivées
ku	ku'
$u+v$	$u'+v'$
$u-v$	$u'-v'$

Exemple :

1. Si $f(x) = 2x + 3 + x^2$ alors $f'(x) = (2x+3)' + (x^2)' = 2 + 2x$ *[formule 2]*
2. Si $f(x) = 5x^3$ alors $f'(x) = 5 \times (x^3)' = 5 \times 3x^2 = 15x^2$ *[formule 1]*

Exercices du livre :

16 à 49 p 102

III-2 Sens de variation et extrema

***Travail de l'élève* 4.** p98

Considérons une fonction f dérivable sur un intervalle I.

Théorème 1 :
Admis

1. Si pour tout $x \in I$ on a $f'(x) > 0$, la fonction f est strictement croissante sur I, et réciproquement.
2. Si pour tout $x \in I$ on a $f'(x) < 0$, la fonction f est strictement décroissante sur I, et réciproquement.
3. Si pour tout $x \in I$ on a $f'(x) = 0$, la fonction f est constante sur I, et réciproquement.

Attention !
Ne pas confondre le signe de la fonction et le signe de sa dérivée !

Rappelons que le but de ce chapitre est entre autre de pouvoir dresser le tableau de variation d'une fonction sans pour autant connaître sa représentation graphique. Or pour l'instant nous avons besoin de connaître sa courbe afin de lire le nombre dérivée. Aussi nous allons voir dans la prochaine partie que nous pouvons calculer un nombre dérivée sans connaître la représentation graphique de la fonction.

Exemples :
Voici les tableaux de variation de la fonction carré et de la fonction inverse, trouvés à partir de leur fonction dérivée.

Fonction carré

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de la dérivée $2x$		$-$	0	$+$	
Variations de x^2		$\searrow$	0	$\nearrow$	
Signe de x^2		$+$	0	$+$	

Fonction inverse

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de la dérivée $-\frac{1}{x^2}$		$-$	‖	$-$	
Variations de $\frac{1}{x}$		$\searrow$	‖	$\searrow$	
Signe de $\frac{1}{x}$		$-$	‖	$+$	

Propriété 1 :
Soit x_0 appartenant à I, distinct des extrémités de I
– Si f a un extremum local en x_0, alors $f'(x_0) = 0$
– Si $f'(x_0) = 0$ et si f' change de signe en x_0, alors f a un extremum local en x_0
Dans les deux cas, cet extremum vaut $f(x_0)$.

Exemples :
La fonction carré admet un minimum en 0, la fonction cube n'admet pas d'extremum.

Remarque : Les extremums locaux sont à rechercher à partir des nombrres où la dérivée s'annule.

Exercices du livre : Intervalle
50 à 67 p 103 + 78 à 81 p 106 (Position de la courbe par rapport à sa tangente)

IV) Rappels utiles sur les tableaux de signes

IV-1 Signe de $ax+b$

***Travail de l'élève* 5.**

1. Etude du signe de $2x-3$:
- Tracer à la calculatrice la représentation graphique de la fonction $f(x)=2x+3$
- Résumer le signe de l'expression $2x+3$ dans ce tableau :

x	$-\infty$	$\cdots$	$+\infty$
Signe de $2x+3$		0	

2. Mêmes questions pour les expression $-3x-4$, $4x-5$, $-\frac{2}{3}x+8$.

3. Conjecturer un tableau général pour le signe de $ax+b$ avec $a\neq 0$ (on distinguera deux cas).

Propriété 2 : *Signe d'une fonction affine*
Soit f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax+b$ avec $a\neq 0$.
Alors $f(x)=0$ pour $x=-\frac{b}{a}$ et

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
Signe de $ax+b$		Signe Opposé de a	0	Signe de a	

Remarque : On retiendra que la fonction est du signe de a à **droite** du 0 (du signe opposé sinon).

IV-2 Signe d'un produit du type $(ax+b)(cx+d)$

Grâce à la règle des signes dans une multiplication, on peut trouver le signe du produit d'expressions du type $ax+b$. On utlise pour cela un tableau de signes, afin d'être plus rapide.

***Travail de l'élève* 6.** Etudions le signe des certaines fonctions.

1. La fonction l définie sur $\mathbb{R}$ par $l(x)=35x^2+38x+8$:

a. Donner graphiquement le tableau de signes de l (grâce à la calculatrice).

b. Vérifier que pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a $l(x)=(5x+4)(7x+2)$

c. Résoudre $l(x)=0$.

d. En déduire le tableau de signes exact de l.

2. Soient les fonctions m et n définies sur $\mathbb{R}$ par $m(x)=-2x+1$ et $n(x)=-6x-2$.

a. Etablir le tableau de signes des fonctions m et n

b. Etablir graphiquement le tableau de signe de la fonction p définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = (-2x+1)(-6x-2)$.

c. Comment retrouver ce résultat par le calcul ?

d. Etablir graphiquement le tableau de signe de la fonction r définie sur $\mathbb{R}$ par $r(x) = \dfrac{-2x+1}{-6x-2}$.

e. Comment retrouver ce résultat par le calcul ?

Signe d'un produit (ou d'un quotient)

Grâce à la règle des signes dans une multiplication (ou une division), on peut trouver le signe d'un produit (ou d'un quotient) d'expressions du type $ax+b$.

Pour cela, on commence par résoudre l'équation produit nul (ou le dénominateur égal à 0, ainsi que le numérateur) , puis on utlise un grand tableau de signes.

Sur la dernière ligne, on trouve le signe du produit (ou du quotient) en appliquant la règle des signes.

Attention !

- On ne peut pas appliquer cette règle pour une addition d'expressions, car on n'a pas de règle de signes dans ce cas là !
- On notera que 0 multiplié par n'importe quoi donne 0.
  Par contre, n'importe quoi divisé par 0 donne une valeur interdite !

Exemples :

1. On souhaite résoudre $(2x+1)(-x+2) \leq 0$. On commence par résoudre :

$$(2x+1)(-x+2) = 0 \iff 2x+1=0 \quad \text{ou} \quad -x+2=0 \iff x = -\frac{1}{2} \quad x=2$$

On établit le tableau de signe de cette expression :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
Signe de $2x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $-x+2$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $(2x+1)(-x+2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Conclusion : $(2x+1)(-x+2) = 0$ ssi $x \in \left\{-\frac{1}{2};2\right\}$

$(2x+1)(-x+2) > 0$ ssi $x \in \left]-\frac{1}{2};2\right[$ et $(2x+1)(-x+2) < 0$ ssi $x \in \left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[\cup \left]2;+\infty\right[$

L'ensemble des solutions de l'inéquation $(2x+1)(-x+2) \leq 0$ est donc $S = \left]-\infty;-\frac{1}{2}\right] \cup \left[2;+\infty\right[$

2. Résoudre $Q(x) = \dfrac{2x+1}{-x+2} \leq 0$.

On sait que $2x+1=0 \iff x = -\frac{1}{2}$ et on sait que $-x+2=0 \iff x=2$ (valeur interdite).

On a donc le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
Signe de $2x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $-x+2$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $\dfrac{2x+1}{-x+2}$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $Q(x) \leq 0$ est donc $S = \left]-\infty;-\frac{1}{2}\right] \cup \left]2;+\infty\right[$

<u>Exercice 7</u> **:**

Etablir les tableaux de signes des expressions suivantes :

$(3x+4)(-2x+1)$ $\quad x^2-6x$ $\quad x^2-9$ $\quad \dfrac{-x+5}{-4-2x}$ $\quad 3x(x^2+1)$ $\quad -2(x-5)^2$

Exercices du livre : Intervalle

Applications (Type BAC) : 102-103-104-105-107-108 p 114