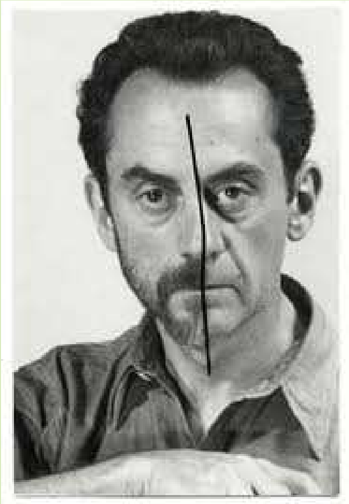
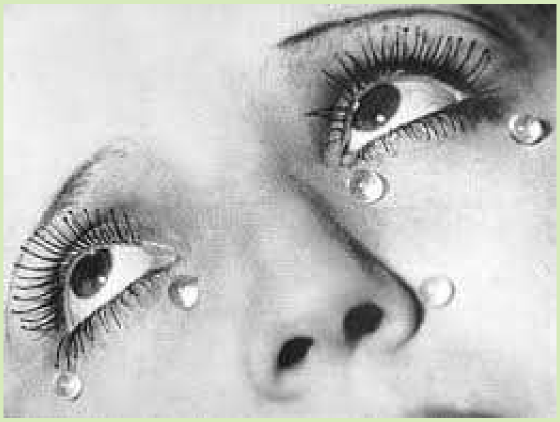
CHAPITRE 1

LES SUITES



HORS SUJET



TITRE : « Larmes »

AUTEUR : MAN RAY

PRÉSENTATION SUCCINTE DE L'AUTEUR : Man Ray, né Emmanuel Rudzitsky en 1890, à Philadelphie, est un peintre, photographe et réalisateur de films, acteur du dadaïsme à New York, puis du surréalisme à Paris.

Sa carrière commence à New York, avec son ami proche Marcel Duchamp. Ils forment la branche américaine du mouvement Dada. Après quelques expériences artistiques infructueuses, Man Ray conclut que « Dada ne peut pas vivre à New York ».

En 1921 Man Ray arrive à Paris où il rencontre divers surréalistes. Il s'installe dans le quartier du Montparnasse, rencontre et tombe amoureux de la chanteuse française et modèle Kiki de Montparnasse. Man Ray révolutionne l'art photographique.

Avec notamment Max Ernst, Joan Miró et Pablo Picasso, il présente ses oeuvres à la première exposition surréaliste de la galerie Pierre à Paris en 1925. En 1928, il tourne son troisième film Les Mystères du château de Dé.

En 1940, après la défaite de la France, Man Ray s'embarque pour les États-Unis en compagnie du couple Dalí et du cinéaste René Clair. A Hollywood, il reçoit des propositions d'exposition, rencontre une femme, Juliet, et décide de se remettre à peindre.

Man Ray est mort le 18 novembre 1976, à Paris. Inhumé au cimetière du Montparnasse), on peut lire sur sa tombe son épitaphe : « Unconcerned, but not indifferent » (« Détaché, mais pas indifférent »).

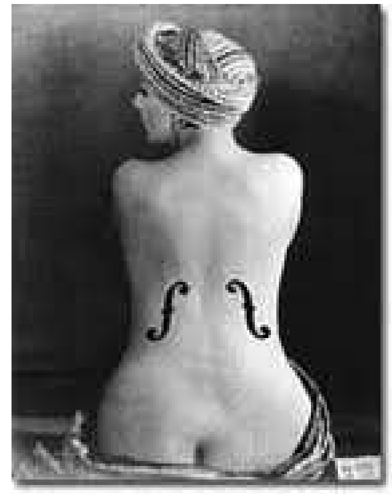
Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : C. Aupérin
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée : Jules Fil (Carcassonne)

Table des matières

« *Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous* »
THURSTON MOORE (SONIC YOUTH)

LEÇON 1

Les suites



Résumé

Dans ce chapitre vous allez étudier les suites, en particulier, les suites arithmétiques et géométriques. Vous saurez comment étudier leur sens de variation et calculer les sommes de termes consécutifs. Mais commençons d'abord par revoir certaines bases, notions et vocabulaire.

I) Définition et génération d'une suite

I-1 Introduction

Travail de l'élève **1.** Il arrive que l'on demande, lors de tests psychotechniques par exemple, de compléter "logiquement" une suite de nombres, comme par exemple :

$$1, 2, 4, 8, 16, \dots\dots, \dots\dots, \dots\dots$$

$$1, 4, 9, 16, 25, \dots\dots, \dots\dots, \dots\dots$$

$$-3, 1, 5, 9, \dots\dots, \dots\dots, \dots\dots$$

Trouver les prochaines valeurs et tenter d'établir une définition générale pour chaque de ces listes ordonnées de nombres.

En mathématiques, une **suite** u est une **liste ordonnée de nombres** : les éléments de cette liste :
- Sont appelés **termes**
- Sont repérés par leur position dans la liste, appelé **rang**

Le 1^{er} terme de la suite u est souvent noté u_0 (ou u_1), et appelé terme initial
Le $2^{ème}$ terme de la suite u est souvent noté u_1 (ou u_2)
....
....
Le $n^{ème}$ terme de la suite u est souvent noté u_{n-1} (ou u_n)

Le terme précèdent u_n est u_{n-1}, le suivant u_{n+1}.

On note $u = (u_n)$ pour signifier que le rang d'un terme de la suite u est un entier naturel (ie positif et il n'y a pas de "fin" de liste). On précisera toujours dans les énoncés si l'on commence à compter à partir de 0 ou de 1.

On a donc :

$$\overbrace{u}^{\text{nom de la suite}} = \left\{ \overbrace{u_0}^{1^{\text{er}}\text{ terme}} \; ; \; \overbrace{u_1}^{2^{\text{nd}}\text{ terme}} \; ; \; u_2 \; ; \; \dots \; ; \; u_{n-1} \; ; \; \overbrace{u_n}^{\text{terme de rang } n} \; ; \; u_{n+1} \; ; \; \dots \right\}$$

I-2 Définition

Définition 1 :

Une **suite** numérique u ou encore (u_n) est une fonction qui à un entier positif (ou nul) n fait correspondre un nombre u_n.

Il s'agit en fait d'une *liste ordonnée infinie* de valeurs appelées **termes** de la suite (ce sont les $u_0, u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, u_n, u_{n+1}, \dots$).

La position d'une valeur dans cette liste est appelé **rang** (c'est le nombre positif ou nul n).

Le premier terme d'une suite est appelé **terme initial** (il s'agit en général de u_0 ou de u_1).

Exemples :

1. Soit la suite u définie sur les entiers positifs ou nul par $u_n = -2n^2 + 3n + 1$. Calculer les 5 premiers termes de cette suite.
2. Soit la suite v définie par $v_1 = 3$ et $v_n = 3v_{n-1} + 4$. Donner les 5 premiers termes de cette suite.

I-3 Mode de génération : calcul des termes d'une suite

Une suite peut être engendrée de deux manières :

Définition "par récurrence" d'une suite (u_n)

On nous donne : $\begin{cases} \text{le terme initial } u_0 \text{ ou } u_1 \\ \text{la relation qui permet de calculer un terme } u_n \text{ à partir du précédent } u_{n-1} \end{cases}$

Exemple :

Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = -2u_n + 1 \end{cases}$

On a alors : $u_1 = -2u_0 + 1 = -2 \times \dots + 1 = \dots$
$u_2 = -2u_1 + 1 = -2 \times \dots + 1 = \dots$
$u_3 = -2u_2 + 1 = -2 \times \dots + 1 = \dots$ etc

Remarques :

– *Avantage* : On visualise ainsi facilement comment l'on passe d'un terme au suivant (le lien logique qui lie les termes entre eux)

– *Inconvénient* : Dans l'exemple précédent, pour calculer u_{100}, il faut connaître u_{99}, et pour calculer u_{99}, il faut connaître u_{98}, etc ... Il est alors préférable d'exprimer u_n

– ***Avec une calculatrice*** :
Tapez la valeur du premier terme, puis tapez sur $\boxed{\text{EXE}}$ (ou $\boxed{\text{ENTER}}$)
On utilise la touche $\boxed{\text{Ans}}$ de la calculatrice, qui est un rappel du résultat du calcul précèdent :
Dans notre exemple $-2 \times \boxed{\text{SHIFT}}\boxed{\text{Ans}} + 1$, puis $\boxed{\text{EXE}}$ (ou $\boxed{\text{ENTER}}$)
Vous voyez apparaître la valeur de u_1 ; à chaque fois que vous appuyez sur $\boxed{\text{EXE}}$, le terme suivant de la suite apparaît...

Définition "explicite" d'une suite (u_n)

On nous donne : $\begin{cases} \text{le rang initial } 0 \text{ ou } 1 \\ \text{la relation qui permet d'obtenir un terme } u_n \text{ à partir de son rang } n \end{cases}$

Exemple :

Soit (u_n) définie par $u_n = -5+7n$ pour $n \geqslant 0$.
On a alors $u_0 = \dots$, $u_2 = \dots$, $u_3 = \dots$, $u_7 = \dots$, $u_{100} = \dots$ etc

Remarque : ***Avec une calculatrice*** **:**

– Entrer la suite comme une fonction dans le menu f(x), en remplaçant le n par X dans l'expression donnée.
Par exemple : Y1=-5+7X
– Régler les paramètres du tableau de valeurs dans le menu Tblset.
Par exemple : *Casio* : Start=0, End=20, Pitch=1 *TI* : TblStart=0, ΔTbl=1
– Afficher ce tableau de valeurs dans le menu table.
Vous avez, dans l'ordre, les termes de cette suite à partir de u_0.

I-4 Sens de variation

Définition 2 :

– La suite (u_n) est une suite **croissante** si et seulement si, pour tout entier n, $u_{n+1} \geq u_n$.
Autrement dit, les termes de la suite sont de plus en plus grands.
– La suite (u_n) est une suite **décroissante** si et seulement si, pour tout entier n, $u_{n+1} \leq u_n$
Autrement dit, les termes de la suite sont de plus en plus petits.
– La suite (u_n) est une suite **constante** si et seulement si, pour tout entier n, $u_{n+1} = u_n$.
Autrement dit, les termes de la suite sont tous égaux.

Méthodes pour étudier le sens de variation d'une suite (u_n) :

► **On étudie généralement le signe de $u_{n+1} - u_n$:**

1. On exprime le terme général u_{n+1}, s'il n'est pas donné dans l'énoncé.
2. On simplifie $u_{n+1} - u_n$.
3. On regarde si la valeur obtenue est positive ou négative.
4. On conclue sur l'ordre de u_{n+1} et de u_n, et donc sur le sens de variation de la suite (u_n).

Exemple :

Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = u_n + 5 \end{cases}$

Alors on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= u_n + 5 - u_n \\ &= 5 \end{aligned}$$

On voit que $u_{n+1} - u_n > 0$, et donc que $u_{n+1} > u_n$ pour tout n : la suite est donc croissante.
Mais ceci se voyait très bien dès le départ ... Ce cas est donc rarement rencontré.

Exemple :

Soit la suite (u_n) définie pour $n \geq 0$ par $u_n = -5n+9$, alors on a :

$$\begin{array}{rcll} u_{n+1} & = & -5(n+1)+9 & \text{(penser aux parenthèses autour de } n+1\,!!) \\ & = & -5n-5+9 & \\ & = & -5n+4 & \end{array}$$

Ainsi pour tout n on a :

$$\begin{array}{rcll} u_{n+1}-u_n & = & -5n+4-(-5n+9) & \text{(penser aux parenthèses autour de l'expression de } u_n\,!!) \\ & = & -5n+4+5n-9 & \\ & = & -5 & \end{array}$$

On voit que $u_{n+1}-u_n < 0$, et donc que $u_{n+1} < u_n$ pour tout n : la suite est donc décroissante.

Méthodes pour étudier le sens de variation d'une suite (u_n) : (suite)

- **Lorsque tous les termes de la suite u sont strictement positifs, on regarde si le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est plus grand ou plus petit que 1 :**
  1. On s'assure que tous les termes de la suites sont positifs
  2. On exprime le terme général u_{n+1}, s'il n'est pas donné dans l'énoncé.
  3. On simplifie $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.
  4. On regarde si la valeur obtenue est supérieure ou inférieure à 1 (elle sera forcément positive ! !)
  5. On conclue sur l'ordre de u_{n+1} et de u_n, et donc sur le sens de variation de la suite (u_n).

Exemple :

Soit (u_n) définie pour $n \geq 1$ par $u_n = 2\times 5^n$.
Il est clair que $u_n > 0$ pour tout entier positif n.
On a $u_{n+1} = 2\times 5^{n+1}$.
Ainsi pour tout n on a : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2\times 5^{n+1}}{2\times 5^n} = \dfrac{5^{n+1}}{5^n} = 5$
On voit que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, et donc que $u_{n+1} > u_n$ pour tout n : la suite est donc croissante.

Attention !

Comparer deux termes consécutifs particuliers de la suite (comme u_0 et u_1) ne permet de conclure sur son sens de variation général ! !

Remarque : Toutes les suites ne sont pas monotones : par exemple, la suite u définie pour $n \geq 0$ par $u_n = (-1)^n$ ne l'est pas : $u_0 = \ldots$, $u_1 = \ldots$, $u_2 = \ldots$, $u_3 = \ldots$, $u_4 = \ldots$, etc

Exercice 1 **:**

Soit (u_n) la suite définie pour $n \geq 0$ par : $u_n = 4n+3$

1. Calculer $u_{n+1}-u_n$
2. En déduire le sens de variation de (u_n).

Exercice 2 :
Soient (v_n) la suite définie pour $n \geq 1$ par : $v_n = -2n+1$ et (w_n) la suite définie pour $n > 0$ par :
$$\begin{cases} w_1 = 3 \\ w_{n+1} = w_n + 2 \end{cases}$$
Trouver le sens de variation des suites (v_n) et (w_n).

II) Suites arithmétiques

II-1 Définition

Définition 3 :
Une suite **arithmétique** est une suite de nombres telle que chacun de ses termes s'obtient en ajoutant au précédent un même nombre appelé **raison**.
Autrement dit, une suite (u_n) de premier terme u_0 et de raison r est **arithmétique** lorsque pour tout entier n, on a $u_{n+1} = u_n + r$

Exemple :
Soit la suite (u_n) arithmètique, de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $r = 2$.
La définition de (u_n) par récurrence est $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}$
Les premiers termes de cette suite sont $u_1 = 7$, $u_2 = 9$, $u_3 = 11$, $u_4 = 13$, $u_5 = 15$, $u_6 = 17$ ...
On constate que pour avoir $u_6 = 17$ on a en fait ajouter 6 fois la raison $r = 2$ au terme initial $u_0 = 5$.
En effet $u_6 = 5 + 6 \times 2$ ou encore $u_6 = u_0 + 6 \times r$.

II-2 Relation entre deux termes non consécutifs

Travail de l'élève **2.** Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $r = 3$

1. Donner la définition par récurrence de la suite (u_n).
2. Calculer les 6 premiers termes de (u_n).
3. Prouver que u_n est croissante.
4. Combien de fois a-t-on ajouter la raison r au terme initial u_0 pour obtenir u_1 ? u_2 ? Même question jusqu'à u_6.
5. Conjecturer alors u_n en fonction de n.

Propriété 1 :
Soit une suite arithmétique (u_n), de premier terme u_0 et de raison r.
- **Relation entre u_n et u_0 :** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = u_0 + nr$
- **Relation entre u_n et u_p :** Pour tous $n, p \in \mathbb{N}$, on a $u_n = u_p + (n-p)r$
- **Relation entre u_n et u_1 :** Pour tous $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = u_1 + (n-1)r$

Exercices du livre :
$2+4+5+7+9+13$ p 20 (calcul de termes)

Les suites arithmétiques ne sont pas toujours données dans les énoncés par leur relation de récurrence, mais par une relation explicite liée à la propriété précédente. Dans ca cas, il faut savoir les reconnaître, pour pouvoir utiliser leurs propriétés.

Méthodes pour reconnaître une suite arithmétique :
On calcule $u_{n+1}-u_n$. Si cette valeur est une constante r (indépendante de n), alors la suite est arithmétique (car dans ce cas on a bien $u_{n+1}=u_n+r$ pour tout n), sinon non.

Exemple :
Soit (u_n) la suite définie pour $n\geq 0$ par $u_n=5-3n$.

Pour tout $n\geq 0$, on a :
$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= 5-3(n+1)-(5-3n) \\ &= 5-3n-3-5+3n \\ &= -3 \end{aligned}$$
'penser aux parenthèses pour le $n+1$ et le u_n !!)

Donc la suite (u_n) est arithmétique, et sa raison est $r=-3$.
De plus $u_{n+1}-u_n=-3$ donc la suite est décroissante.

Exercices du livre :
11 à 13 p 20 (pbs)

II-3 Sens de variation

Travail de l'élève **3.** 1 p12

Théorème 1 :
Soit (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de terme initial u_0.
Puisque pour tout n on a $u_{n+1}=u_n+r$ on a :
- Si $r<0$, la suite est décroissante.
- Si $r>0$, la suite est croissante.
- Si $r=0$, la suite est constante.

Exercices du livre :
$27-28-29-30-32$ p 22

II-4 Somme de termes consécutifs

Travail de l'élève **4.** (p 14)
Lors d'un stage de remise en forme de 14 jours, un coureur cycliste effectue 60 km le premier jour, puis augmente son parcours de 10 km chaque jour suivant.
On note u_n le nombre de kilomètres parcourus par le cycliste ou cours du $n-\grave{e}me$ jour (ou a donc $u_1=60$.

1. Expliquer pourquoi la suite u est arithmétique ; préciser sa raison.
   Exprimer u_n en fonction de n
2. **a.** Calculer la somme des sept premiers termes de la suite ; en déduire le nombre de kilomètres parcourus par le cycliste durant le première semaine.

b. Calculer $S_1 = 7 \times \dfrac{u_1 + u_7}{2}$. Que constate-t-on ?

3. **a.** Calculer le nombre de kilomètres parcourus par le cycliste durant la deuxième semaine.

b. Calculer $S_2 = 7 \times \dfrac{u_8 + u_{14}}{2}$. Que constate-t-on ?

Théorème 2 :

On considère (u_n) une suite arithmétique.

Si $S = \underbrace{u_k + u_{k+1} + ... + u_p}_{\text{termes consécutifs}}$ est une somme de termes consécutifs de cette suite, alors :

$$S = (\text{nombre de terme de S}) \times \frac{(\text{premier terme de S}) + (\text{dernier terme de S})}{2} = (p - k + 1) \times \frac{u_k + u_p}{2}$$

Cas particuliers importants :

– Si le terme initial est u_1, alors $\underbrace{u_1 + u_2 + .. + u_n}_{n \text{ termes}} = n \times \dfrac{u_1 + u_n}{2}$

– Si le terme initial est u_0, alors $\underbrace{u_0 + u_1 + u_2 + .. + u_n}_{(n+1) \text{ termes}} = (n + 1) \times \dfrac{u_0 + u_n}{2}$

Attention !

Il y a un « décallage » dans le nombre de termes !

Exemple :

Soit (u_n) la suite arithmétique de raison -5 et de terme initial $u_0 = 1$.

Montrer que $\underbrace{u_7 + u_8 + ... + u_{17}}_{11 \text{ termes}} = -649$

Exercices du livre :

38 à 58 p 23

Exercice 3 **:**

Monsieur X. se constitue un capital retraite en versant chaque année une somme sur un compte épargne. Les versements sont les termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 100€, le premier versement étant d'un montant de 1000€. Si on note V_n le versement de la $n -$ ème année, la suite (V_n) ne commence qu'à partir de $n = 1$.

1. Donner V_1 ; V_2 ; V_3 ; V_4
2. Exprimer la suite V par récurrence
3. Exprimer V_n en fonction de n
4. Au bout de 20 ans, quel sera la capital de monsieur X. ?

Exercice 4 **:**

Pour un prêt de 1500€, un organisme de crédit propose à un client un remboursement en sept annuités, qui sont les sept premiers termes de la suite arithmétique (u_n) de raison 50 et de terme initial $u_1 = 100$

Calculer le montant total du remboursement.

Exercice 5 :
En 1998, un pays consommait 20 tonnes d'un produit. On note u_n le nombre de tonnes consommées en $1998+n$ (par exemple, u_3 est le nombre de tonnes consommées en $1998+3$, soit en 2001). La suite (u_n) est arithmétique, de raison 3 et de terme initial $u_0 = 20$.
Calculer le nombre total de tonnes de produit consommées par le pays de 1998 à 2004

Exercice 6 :
Un fabricant produit 200 objects la première année, puis augmente sa production de 25 objets par an.
On note u_n le nombre d'objets fabriqués la $n-$ième année. La suite (u_n) est arithmétique, de raison 25 et de terme initial $u_1 = 200$.
Calculer le nombre d'objets fabirqués en dix ans.

Exercice 7 :
Marion verse 40€ sur son livret d'épargne à l'ouverture de celui-ci, puis augmente son versement de 5€ tous les mois.
On note u_n le $n-$ième versement effectué après l'ouverture. La suite (u_n) est arithmétique, de raison 5 et de terme initial $u_0 = 40$.
Calculer la somme totale versée la première année.

III) Suites Géométriques

III-1 Définition

Définition 4 :
Une suite gémétrique est une suite de nombres telle que chacun de ses termes s'obtient en multipliant le précédent par un même nombre appelé raison.
Autrement dit, une suite (u_n) de premier terme u_0 et de raison q est **géométrique** lorsque, pour tout entier n, on a $u_{n+1} = u_n \times q$

Exemple :
Soit la suite (u_n) géométrique, de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $q = -2$.
La définition de (u_n) par récurrence est $\{\ u_0 = 5u_{n+1} = -2 \times u_n$
Les premiers termes de cette suite sont $u_1 = -10$, $u_2 = 20$, $u_3 = -40$, $u_4 = 80$, $u_5 = -160$, $u_6 = 320$.

III-2 Relation entre deux termes non consécutifs

Travail de l'élève **5.** Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 10$ et de raison $q = 1,25$

1. Donner la définition par récurrence de la suite (u_n)
2. Calculer les 6 premiers termes de (u_n)
3. Prouver que (u_n) est croissante
4. Combien de fois a-t-on multiplier le terme initial par la raison pour obtenir u_1 ? u_2 ? Même question jusqu'à u_6.
5. Conjecturer u_n en fonction de n.

Propriété 2 :
Soit une suite géométrique (u_n), de premier terme u_0 et de raison q.
- **Relation entre u_n et u_0 :** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = u_0 \times q^n$
- **Relation entre u_n et u_p :** Pour tous $n, p \in \mathbb{N}$, on a $u_n = u_p \times q^{n-p}$
- **Relation entre u_n et u_1 :** Pour tous $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = u_1 \times q^{n-1}$

Exercices du livre :
$15+17+18+20+21+24$ p 20

Les suites géométriques ne sont pas toujours données dans les énoncés par leur relation de récurrence, mais par une relation explicite liée à la propriété précédente. Dans ce cas, il faut savoir les reconnaître, pour pouvoir utiliser leurs propriétés.

Méthodes pour reconnaître une suite géométrique :
On calcule $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$. Si cette valeur est une constante q (indépendante de n), alors la suite est géométrique (car dans ce cas on a bien $u_{n+1} = q \times u_n$ pour tout n), sinon non.

Exemple :
Soit (u_n) définie pour $n \geq 0$ par $u_n = 2 \times 3^n$.
Pour tout $n \geq 0$, on a : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2 \times 3^{n+1}}{2 \times 3^n} = \dfrac{3^{n+1}}{3^n} = 3$.
Donc la suite (u_n) est géométrique, et sa raison est $q = 3$.
De plus $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 3 > 1$ donc la suite est croissante.

Exercice 8 **:**
Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite géométrique de raison 2 et de premier terme 25.

1. Donner u_1 ; u_2 ; u_3 ; u_4
2. Exprimer la suite (u_n) par récurrence
3. Exprimer u_n en fonction de n
4. Calculer u_{999}

Exercices du livre :
22 à 25 p 21

III-3 Sens de variation

Travail de l'élève **6.** 2 p 12

Théorème 3 :
Soit (u_n) est une suite géométrique de raison $\mathbf{q > 0}$ et de terme initial $\mathbf{u_0 > 0}$.
Puisque, pour tout n on a $u_{n+1} = q \times u_n$ on a :
- Si $0 < q < 1$, la suite est décroissante : on dit que les termes de la suite sont en décroissance géométrique ou exponentielle.
- Si $q > 1$, la suite est croissante : on dit que les termes de la suite sont en croissance géométrique ou exponentielle.
- Si $q = 1$, la suite est constante

Remarque : Si q est négatif, la suite n'est ni croissante, ni décroissante.

Exercice 9 :
Un article dont le prix initial était de 250€, voit son prix baisser tous les mois de 10%. La suite u des prix mensuels de cet article est donc géométrique

1. Préciser sa raison et son premier terme
2. Exprimer u_n en fonction de n
3. Donner le sens de variation de la suite (u_n)

III-4 Somme de termes consécutifs

Travail de l'élève **7.** p16
Avant les fêtes de fin d'année, sur une période de six jours, un chocolatier voit sa vente de ballotins doubler chaque jour. Il en vend 20 le premier jour.
On note u_n le nombre de ballotins vendus le $n-$ième jour (on a donc $u_1 = 20$).

1. Expliquer pourquoi la suite (u_n) est géométrique ; préciser sa raison.
   Exprimer u_n en fonction de n
2. **a.** Calculer la somme des six termes de cette suite ; en déduire le nombre total de ballotins vendus au cours de cette période.
   b. Calculer $S_1 = 20 \times \dfrac{1-2^6}{1-2}$. Que constate-t-on ?
3. **a.** Calculer le nombre de ballotins vendus durant les trois dernier jours de cette période
   b. Calculer $S_2 = u_4 \times \dfrac{1-2^3}{1-2}$. Que constate-t-on ?

Théorème 4 :
On considère (u_n) une suite géométrique, de raison $q \neq 1$.
Si $S = \underbrace{u_k + u_{k+1} + \ldots + u_p}_{\text{termes consécutifs}}$ est une somme de termes consécutifs de cette suite, alors :

$$S = (\text{premier terme de S}) \times \frac{1-(\text{raison})^{(\text{nombre de terme de S})}}{1-(\text{raison})} = u_k \times \frac{1-q^{p-k+1}}{1-q}$$

Cas particuliers importants :

- Si le terme initial est u_1, alors $\underbrace{u_1+u_2+..+u_n}_{n \text{ termes}} = u_1\dfrac{1-q^n}{1-q}$
- Si le terme initial est u_0, alors $\underbrace{u_0+u_1+u_2+..+u_n}_{(n+1) \text{ termes}} = u_0\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Attention !

Il y a toujours un décallage dans le nombre de termes ! !

Exemple :

Soit (u_n) la suite géométrique de raison 3 et de terme initial $u_1 = 1$
Montrer que $u_7 + u_8 + ... + u_{17} = 64569717$

Exercices du livre :

59 à 78 p 25 + TP info

Exercice 10 **:**

Pour limiter ses stocks, un fabricant est amené à diminuer son activité : il décide que désormais, sa production mensuelle doit correspondre à une suite géométrique de raison $0,95$ et de terme initial 200.
On note u_n le nombre d'objets fabriqués le $n-$ième mois après cette décision (ainsi, $u_1 = 200$)
Calculer le nombre total d'objets fabriqués au cours des sept premiers mois après la décision, arrondi à l'unité.

Exercice 11 **:**

Un propriétaire loue un appartement à partir du 1^{er} janvier 2000, pour 9 ans et pour montant annuel de 6000€ en 2000, à condition que le locataire accepte une augmentation annuelle de 2%.
On note u_n le loyer payé en $2000+n$. La suite (u_n) est donc géométrique, de raison $1,02$ et de terme initial $u_0 = 2000$
Calculer le montant total des loyers versés pendant les neuf années, arrondi à l'unité.

Exercice 12 **:**

Il est prévu que le salaire d'un employé augmente de $0,4\%$ chaque mois, pendant 2 ans. Le premier mois, son salaire est de 1500€. On note u_n le salaire perçu le $n-$ième mois. La suite (u_n) est donc géométrique, de raison $1,004$ et de terme initial $u_1 = 1500$
Calculer le montant total des salaires perçus sur les deux ans.

Exercice 13 **:**

En 2000, un automobiliste a eu une dépense annuelle d'essence de 1200€. Il considère que depuis, elle augmente de 3% par an. On note u_n le montant de la facture en $2000+n$. La suite (u_n) est donc géométrique de raison $1,03$ et de terme initial $u_0 = 1200$.
Calculer le montant total de sa dépenser d'essence, pour les six années de 2000 à 2005

Les Annexes

TP INFORMATIQUE : UN EMPRUNT À ANNUITÉS CONSTANTES

Observons un tableau d'amortissement

Nathanael a emprunté $50000€$ pour acheter un studio. La banque lui a prêté cette somme au taux annuel de 5% sur une période de 10 ans. Nathanael a choisi un remboursement à annuités constantes.
Le remboursement d'un prêt est à annuités constantes lorsque tous les montants annuels de remboursements sont identiques.
On appelle amortissements du capital les parts du capital remboursées chaque année.
Le montant des échéances correspond au montant de l'annuité. Chaque annuité est la somme des intérêts dus sur le capital restant à rembourser et d'une part de remboursement du capital. La banque lui a envoyé le tableau d'amortissement de son emprunt sur 10 ans.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Montant du prêt	$50000€$					
2	Durée du prêt	10 ans					
3	Taux du prêt	5%					
4	Montant des annuités	$6475,23€$					
5							
6		Echéance	Capital restant dû avant l'échéance	Amortissement du capital	Intérêts	Annuité	Capital restant dû après échéance
7		1	50000€	3975,23€	2500,00€	6475,23 €	46 024,77 €
8		2	46024,77€	4173,99€	2301,24€	6475,23 €	41 850,78 €
9		3	41 850,78 €	4382,69€	2092,54€	6475,23 €	37468,09 €
10		4	37468,09 €	4601,82€	1873,40€	6475,23 €	32866,27 €
11		5	32866,27 €	4831,92€	1643,31€	6475,23 €	28034,35 €
12		6	28034,35 €	5073,51€	1401,72€	6475,23 €	22960,84 €
13		7	22960,84 €	5327,19€	1148,04€	6475,23 €	17633,65 €
14		8	17633,65 €	5593,55€	881,68€	6475,23 €	12040,11 €
15		9	12040,11 €	5873,22€	602,01€	6475,23 €	6166,88 €
16		10	6166,88 €	6166,88€	308,34€	6475,23 €	0,00 €

1. Vérifier que, pour chaque année, le montant des échéances correspond à la somme des intérêts et de l'amortissement du capital
2. Vérifier que, pour chaque échéance, les intérêts représentent bien 5% des montants du capital restant dû
3. On appelle A la suite des amortissements du capital. Montrer que A est une suite géométrique dont on précisera la raison.

Construisons un tableau d'amortissement

Magalie a emprunté $10000€$ au taux annuel de $4,5\%$. Elle a choisi un remboursement à annuités constantes de $1800€$ pendant 6 ans et le solde à la fin de la septième année. Reproduire un tableau, similaire à celui de la première partie, adapté au cas de Magalie.

1. Calculer le montant des intérêts dus à la fin de la première année et en déduire l'amortissement de l'année. En déduire les formules qu'il faut entrer dans les cellules C7, E7 et F7.
2. Compléter ensuite le tableau pour les six premières années.
3. En déduire le montant restant à rembourser à la fin de la septième année.

Reconstituons un tableau d'amortissement

Le tableau d'amortissement de l'emprunt de Sofiane a été partiellement effacé. Voici ce qu'il en reste. Recomposons ce tableau d'amortissement en utilisant les résultats obtenus dans les parties 1 et 2.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Montant du prêt						
2	Durée du prêt	5 ans					
3	Taux du prêt	=					
4	Montant des annuités						
5							
6		Echéance	Capital restant dû avant l'échéance	Amortissement du capital	Intérêts	Annuité	Capital restant dû après échéance
7		1					
8		2					
9		3					
10		4					
11		5		3389,22€	220,30€		

1. En utilisant les deux données restantes, déterminer le taux annuel du prêt.
2. Calculer ensuite le montant de léchéance. Expliquer pourquoi la formule tapée dans la cellule G11 est : « =$E$11+$F$11 »
3. Quel est le nombre qui devrait figurer en H11 ?
4. Comment calcule-t-on le capital avant échéance ? En déduire la formule de la cellule D13 ?
5. Compléter le tableau
6. Préciser le montant de la somme empruntée par Sofiane.