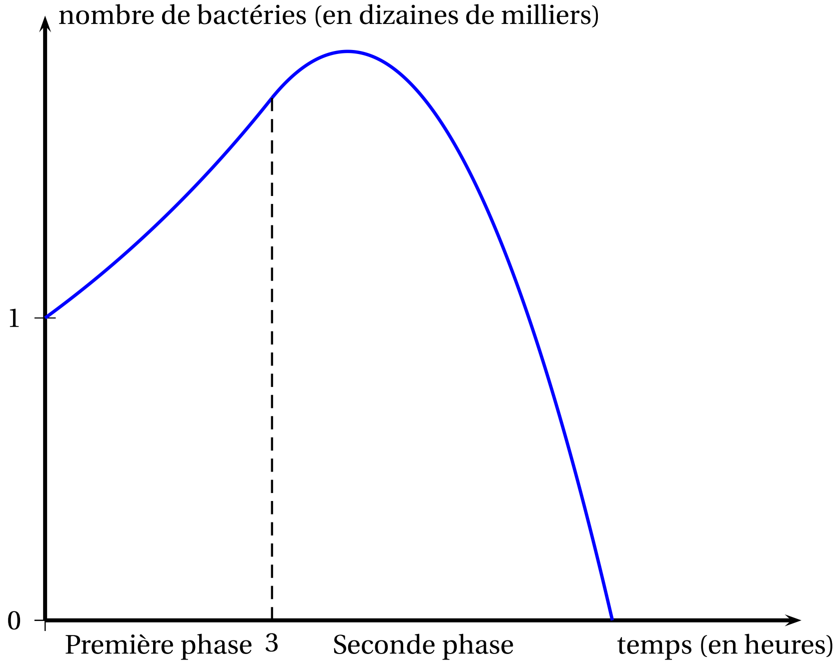
EXERCICES : ANNALES SUR LES DÉRIVÉES

EXERCICE 1 **7 points**

Dans un milieu de culture, une population bactérienne évolue en fonction du temps.
Au début de l'étude, il y a 10 000 bactéries dans la culture. Au bout de 3 heures, on y introduit un puissant antibiotique.
Dans tout l'exercice, t désigne le temps (exprimé en heures) écoulé depuis le début de l'étude.
Le graphique ci-dessous donne l'évolution du nombre de bactéries (exprimé en dizaines de milliers) en fonction de t.



Partie A : étude de la première phase - avant introduction de l'antibiotique

Au cours de la première phase, le nombre de bactéries (exprimé en dizaines de milliers), est donné en fonction de t par :

$$f(t) = 1,2^t.$$

1. Donner, en justifiant, le sens de variation de f sur l'intervalle $[0\,;3]$.
2. Déterminer par le calcul le nombre de bactéries présentes dans la culture au bout d'une heure et demie, puis au bout de trois heures.
   Les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.

Partie B : étude de la seconde phase - après introduction de l'antibiotique

Après introduction de l'antibiotique, et tant qu'il reste des bactéries dans la culture, le nombre de celles-ci (exprimé en dizaines de milliers), est donné en fonction de t par :

$$g(t) = -0{,}1536t^2 + 1{,}2288t - 0,576.$$

1. Calculer l'image de 7,5 par la fonction g puis interpréter le résultat obtenu.
2. Calculer $g'(t)$ pour t appartenant à $[3\,;7{,}5]$, où g' désigne la fonction dérivée de g.
3. Résoudre l'inéquation $g'(t) \geqslant 0$ dans l'intervalle $[3\,;7{,}5]$.
   En déduire les variations de g sur $[3\,;7{,}5]$.
4. Que se passe-t-il au cours de la première heure suivant l'introduction de l'antibiotique ?
   Et au cours des trois heures et demie suivantes ?

5. L'introduction de l'antibiotique a-t-elle permis d'éviter que le nombre de bactéries n'atteigne 20 000 ? Justifier.

EXERCICE 2 **5 points**

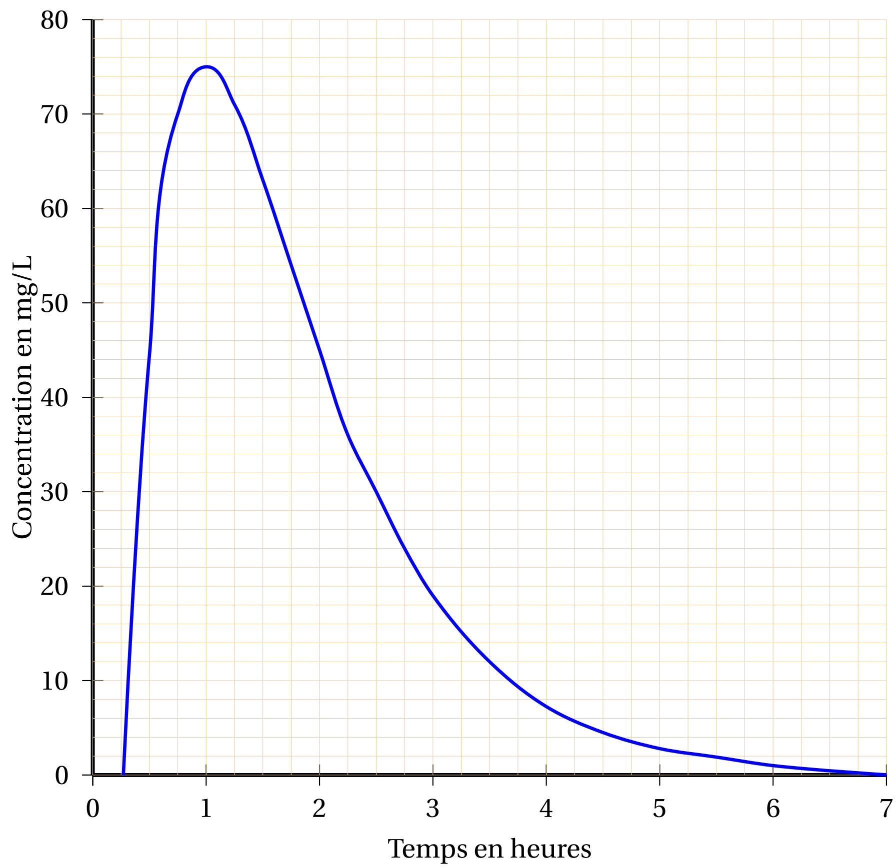
Pour traiter un malade, un médecin a le choix entre deux modes d'administration du même médicament :

- La voie orale : le malade ingère le médicament. La substance active est absorbée et passe alors progressivement dans le sang pour être ensuite éliminée.
- La voie intraveineuse : le produit est injecté directement dans le sang du malade et la substance est progressivement éliminée.

Par ailleurs, le médicament est efficace lorsque la concentration du produit actif dans le sang est supérieure ou égale à 40 mg/L. Le seuil maximal à ne pas dépasser pour éviter les effets secondaires est de 90 mg/L.

Partie A : Voie orale

La courbe ci-dessous représente la concentration en mg/L du produit actif dans le sang du malade en fonction du temps écoulé depuis l'administration du médicament en heures. A l'instant $t = 0$ le malade a ingéré le médicament.

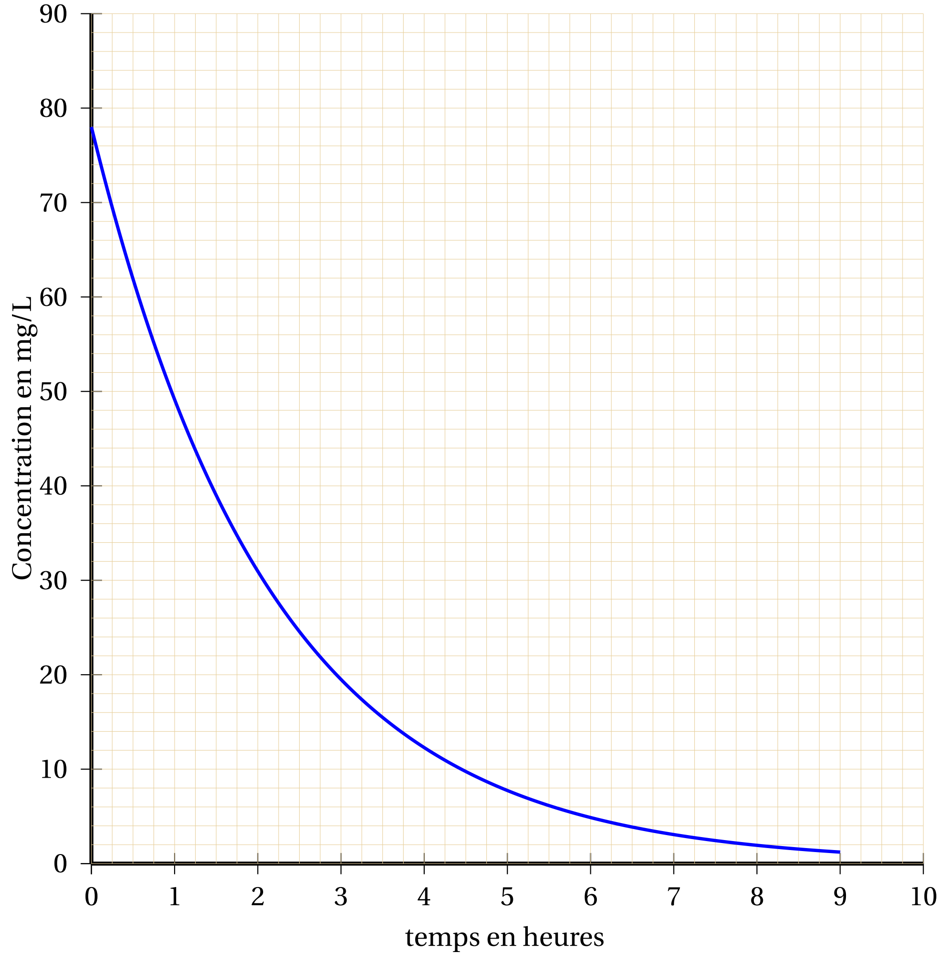


A l'aide de cette représentation graphique, répondre aux questions suivantes :

1. Le médecin a-t-il respecté la dose à ne pas dépasser ? Expliquer.
2. La notice indique que le médicament reste efficace environ 1 heure 45 minutes. Expliquer comment le graphique permet de confirmer cette affirmation.

Partie B : Voie intraveineuse

La fonction C définie sm $[0\,;9]$ par $C(t) = 78 \times 0,63^t$ donne la concentration en mg/L du produit actif dans le sang du malade, en fonction du temps t, exprimé en heures, écoulé depuis l'injection.
Le produit est injecté à l'instant $t = 0$.
On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction C.



1. Calculer la concentration du produit actif dans le sang du malade 2 heures 30 minutes après l'injection. On donnerera les résultats sous forme arrondie à $0,1$ près.
2. Le médicament est-il encore efficace après 2 heures 30 minutes ?
3. Utiliser le graphique pour indiquer combien de temps le médicament reste efficace.
4. Retrouver et préciser ce résultat en résolvant dans $[0\,;\,9]$ l'inéquation
$C(t) \geqslant 40$.

EXERCICE 3 **7 points**

Partie A : étude d'une fonction

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $\mathrm{I} = [0\,;\,30]$ par :

$$f(t) = 2\,500 \times 0,95^t.$$

1. Préciser, en justifiant, le sens de variation de la fonction f sur I.
2. Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant, en arrondissant les valeurs à la dizaine près.

t	0	5	10	15	20	25	30
$f(t)$				1 160			

3. Tracer la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal d'unités graphiques : 1 cm pour 2 unités en abscisse, et 1 cm pour 200 unités en ordonnée.

Partie B : application

En médecine nucléaire, l'iode 123 est utilisé pour effectuer des « scintigraphies » permettant d'observer le fonctionnement de la thyroïde et la présence d'éventuelles anomalies.
Pour cela, on injecte, au temps $t = 0$, un échantillon d'iode 123 dans le corps du patient.
On admet que la fonction f, définie et étudiée dans la **Partie A**, donne une bonne approximation de l'activité du radionucléide iode 123, en fonction du temps t (exprimé en heures) écoulé après l'injection. L'activité de l'iode 123 est exprimée en becquerels (Bq).

1. Donner la valeur de l'activité initiale de l'iode 123 pour l'échantillon injecté au patient.
2. Calculer l'activité de l'iode 123 au bout de 18 heures après l'injection.
   On donnera le résultat à 1 *Bq près.*
3. La période, notée T, d'un radionucléide est le temps nécessaire au bout duquel son activité a diminué de moitié.
   a. En utilisant le graphique de la **Partie A**, donner une valeur approchée, à $0,1$ heure près, de la période T de l'iode 123.
   On laissera apparents les traits de construction utiles.
   b. Déterminer la période T de l'iode 123 par le calcul.
   On donnera le résultat en heures et minutes.

EXERCICE 4 **6 points**

Question 1 :
On considère la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_1 = 32$ et de raison $0,75$.
Le terme u_{11} a une valeur proche de :

a. 39,5 **b.** 1,80 **c.** 40,25 **d.** 1,35

Question 2 :
On considère la fonction f définie et dérivable sur $[-2 ; 2]$ par $f(t) = 3t^2 + 3t - 1$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative sur cet intervalle. La courbe passe par le point M de coordonnées :

a. (-1 ; -1) **b.** (-1 ; -7) **c.** (0 ; 2) **d.** (1 ; - 1)

Question 3 :
Le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 est égal à :

a. 5 **b.** 9 **c.** 8 **d.** 4

Question 4 :
On considère la fonction f définie sur $[0 ; 8]$ par $f(t) = 1,5 \times O,75^t$.
Sur $[0 ; 8]$, les solutions de l'inéquation $f(t) < 0,3$ sont les réels t tels que :

a. $t < \dfrac{\log(0,2)}{\log(0,75)}$ **b.** $t > \log\left(\dfrac{0,2}{0,75}\right)$ **c.** $t < \log\left(\dfrac{0,2}{0,75}\right)$ **d.** $t > \dfrac{\log(0,2)}{\log(0,75)}$

Les deux questions suivantes portent sur le tableau ci-dessous, extrait d'une feuille de calcul représentant le montant, en milliards d'euros, des dépenses de santé en France.

	A	B	C	D	E	F
1	Année	2009	2010	2011	2012	2013
2	Dépenses de santé en milliards d'euros	153	157,6			

Question 5 :
Le pourcentage d'augmentation des dépenses entre 2009 et 2010 est proche de :

a. 0,3 % **b.** 0,03 % **c.** 3 % **d.** 13 %

Question 6 :
Le ministère de la santé souhaite limiter l'augmentation des dépenses de santé à 2,5 % par an à partir de 2010. Quelle formule écrire en D2 qui, recopiée vers la droite, permettra de calculer le montant maximal des dépenses autorisé de 2011 à 2013 ?

a. =$C$2* 1,025 **b.** =C2*1,25 **c.** =$C$2*1,25 **d.** =C2*1,025