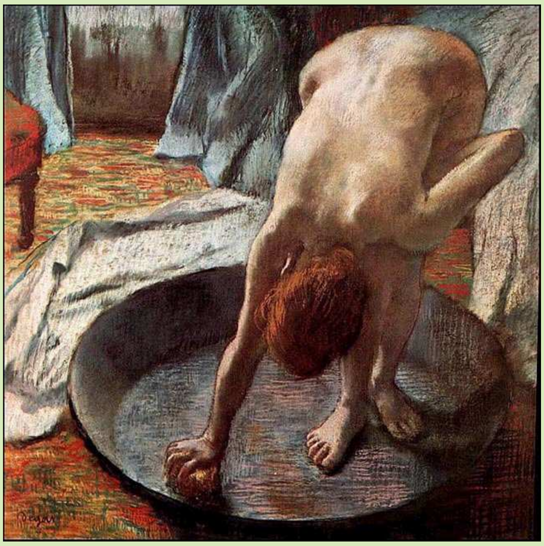
Chapitre 8

Les droites

Hors Sujet



Titre : « Autoportrait (1863) » et « Le Tub (1885) »

Auteur : Edgar Degas

Présentation succinte de l'auteur : Edgar Degas (1834-1917) est un peintre français, en général rattaché au mouvement impressionniste, formé à la fin du XIXe siècle, en réaction à la peinture académique de l'époque.

Sa carrière fut dès le départ influencée par les danseuses. En 1874, il commence à se faire connaître, les critiques louant ou dénigrant le réalisme de son travail. Il explore des thèmes comme les repasseuses ou les femmes à leur toilette, multipliant les points de vue audacieux, recherchant des effets lumineux et colorés. Il dit d'ailleurs à propos de ses nus : « Jusqu'à présent, le nu avait toujours été représenté dans des poses qui supposent un public. Mais mes femmes sont des gens simples... Je les montre sans coquetterie, à l'état de bêtes qui se nettoient. »

A partir des années 1880, Degas va aussi poser la question d'une sculpture « impressionniste », réalisant des modèles en cire peints au naturel, qu'il accessoirise ensuite. Seule *La Grande Danseuse* (cf première page) fut présenté de son vivant, les autres modèles l'aidant surtout dans ses peintures. Cette incarnation de la grâce et de l'innocence trahit en réalité la fascination de Degas pour la criminalité. En effet, avec son visage est sculpté sur le modèle des physionomies de criminels définies à l'époque, et la danseuse était un parfait « petit rat », transmettant la syphilis aux bourgeois venant la voir ...

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : C. Aupérin
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée : Jules Fil (Carcassonne)

Table des matières

I) D’un point de vue géométrique **1**
I-1 Vecteurs colinéaires 1
I-2 Application à la géométrie 2

II) D’un point de vue analytique **3**
II-1 Equation de courbe 3
II-2 Equations de droite 4
II-3 Intersection de droites 6

« *Quand quelqu’un paye un tableau* 3 000 *francs, c’est qu’il lui plaît.*
Quand il le paye 300 000 *francs, c’est qu’il plaît aux autres.* »
EDGAR DEGAS

LEÇON 8

Les droites

Introduction

On sait déjà que l'on peut décrire une droite par la donnée de deux points.
On peut également la décrire à partir d'un point et d'un vecteur directeur donnés.
Enfin, on peut parfois la décrire comme la représentation graphique d'une fonction affine donnée.
Nous allons voir les avantages de chacune de ses méthodes et en découvrir une nouvelle.

Dans tout le chapitre, on se place dans un repère orthonormé du plan.

I) D'un point de vue géométrique

I-1 Vecteurs colinéaires

Travail de l'élève **1.** Soit $(O;\vec{i};\vec{j})$ un repère du plan..
Soient cinq points $A(2;5)$, $B(-1,4)$, $C(8;7)$, $D(0;-4)$ et $E(4.5;-0.5)$

1. Faire un schéma.
2. **a.** Trouver les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{ED}$.
   b. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{ED}$.
   c. Que peut-on en déduire sur la direction de ces deux vecteurs ? sur les droites (AB) et (ED) ?
3. **a.** Trouver les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   b. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AC}$.
   c. Que peut-on en déduire sur la direction de ces deux vecteurs ? sur les droites (AB) et (AC) ?
   d. Que peut-on alors en déduire pour les points A, B et C ?

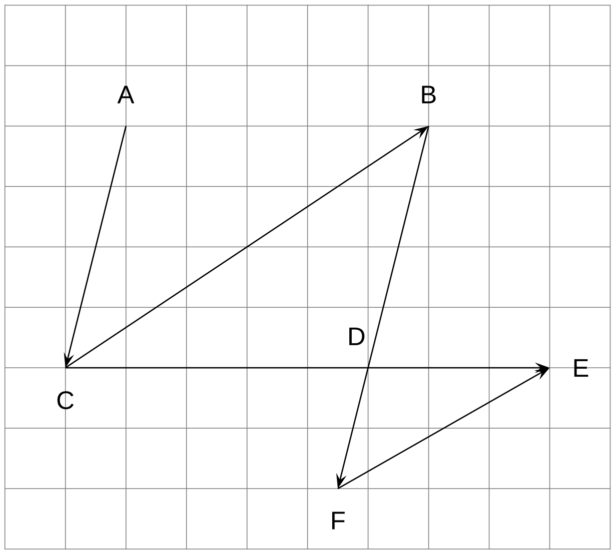
Définition 1 :

Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits **colinéaires** lorsqu'ils ont la même direction.

Attention !
On n'emploiera jamais le mot « parallèles » pour des vecteurs !! En effet, les vecteurs n'ont pas de position fixe dans le plan, contrairement aux droites ...
Lorsque l'on aura deux vecteurs colinéaires, on pourra cependant dire que deux droites portées par ses vecteurs sont parallèles.

Théorème 1 :
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ssi il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.
Autrement dit, les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires ssi leurs coordonnées sont proportionnelles.

Exemple :
Citer des vecteurs colinéaires de la figure ci-dessous et traduire par une relation vectorielle :



Exemples :
$\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 4.5 \\ 6 \end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ? Même question pour $\vec{s}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{g}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Exercices du livre : Hyperbole
n° 46-47-48 p 207

I-2 Application à la géométrie

Propriété 1 :
Soient A, B, C et D quatre points du plan deux à deux distincts.
Les droites (AB) et (CD) sont parallèles ssi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Corollaire 1 :
Soient A, B et C trois points du plan deux à deux distincts.
Les points A, B et C sont alignés ssi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Méthode
Pour démontrer que trois points sont alignés, il suffit de démontrer que deux des vecteurs formés par les trois points sont colinéaires.

Remarque : La relation de Chasles « à l'envers » s'avèrera souvent utile pour démontrer que deux vecteurs sont colénaires.

Exemple :

Dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ du plan, on donne $A(-4;-1)$, $B(-1;1)$, $C(3;3)$, $D(-1;-3)$ et $E(5;1)$.

1. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires.
2. En déduire la nature du quadrilatère $ABED$
3. Les points A, B, C sont-ils alignés ?

Exemple :

Soit ABC un triangle, M et N tels que $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
Montrer que A, M et N sont alignés.

Exercices du livre : Hyperbole

n° **49**-50-**51** p 207 + **62-63-64-73** p 209

II) D'un point de vue analytique

II-1 Equation de courbe

Une condition nécessaire et suffisante

Chaque courbe est un ensemble de points du plan, repérés par un couple de coordonnées.
On **caractérise** alors une courbe par **une condition nécessaire et suffisante** sur les coordonnées des points qui appartiennent à cette courbe.
Il s'agit d'une **équation** que doivent vérifier les coordonnées des points pour être sur la courbe (condition nécessaire), et que les points de la courbe sont les seuls à vérifier (condition suffisante).

Exemple :

Le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1 est caractérisé par la relation $x^2 + y^2 = 1 \quad (R)$.
Cela signifie que :

- Si un point $A(x_A; y_A)$ appartient à $\mathscr{C}$ alors ses coordonnées vérifient la relation (R), c'est-à-dire que $x_A^2 + y_A^2 = 1$
- Réciproquement, si les coordonnées d'un point $B(x_B; y_B)$ vérifient (R), c'est-à-dire si l'on a $x_B^2 + y_B^2 = 1$ alors B appartient à $\mathscr{C}$.

Autrement dit, tous les points qui sont sur $\mathscr{C}$ ont des coordonnées $(x; y)$ qui vérifient (R), et ce sont les seuls points du plan comme cela. On appelle cette relation l'**équation de la courbe**.

Ici, le cercle $\mathscr{C}(O;1)$ est la courbe d'équation $x^2 + y^2 = 1$.

1. Vérifier que I et J appartiennent à $\mathscr{C}$
2. Le point $M\left(\frac{3}{4}; \frac{1}{4}\right)$ appartient-il à $\mathscr{C}$? Et le point $N\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$?
3. Sur un schéma, on voit clairement qu'il y a deux points de $\mathscr{C}$ ayant pour abscisse $\frac{1}{3}$.
Trouver ces deux points.
4. Le cercle $\mathscr{C}$ est-il la courbe représentative d'une fonction ? Pourquoi ?

Courbe représentative d'une fonction

On sait déjà que la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative d'une fonction f, définie sur $\mathscr{D}_f$, est l'ensemble des points $M\left(x; f(x)\right)$ avec $x \in \mathscr{D}_f$.

Par conséquent, on connait une condition nécessaire et suffisante sur les coordonnées de points de la courbe : $y = f(x)$ pour $x \in \mathscr{D}_f$. Il s'agit donc de l'équation de $\mathscr{C}_f$.

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 3x + 2$. Une équation de sa courbe représentative est $y = -2x^2 + 3x + 2$.

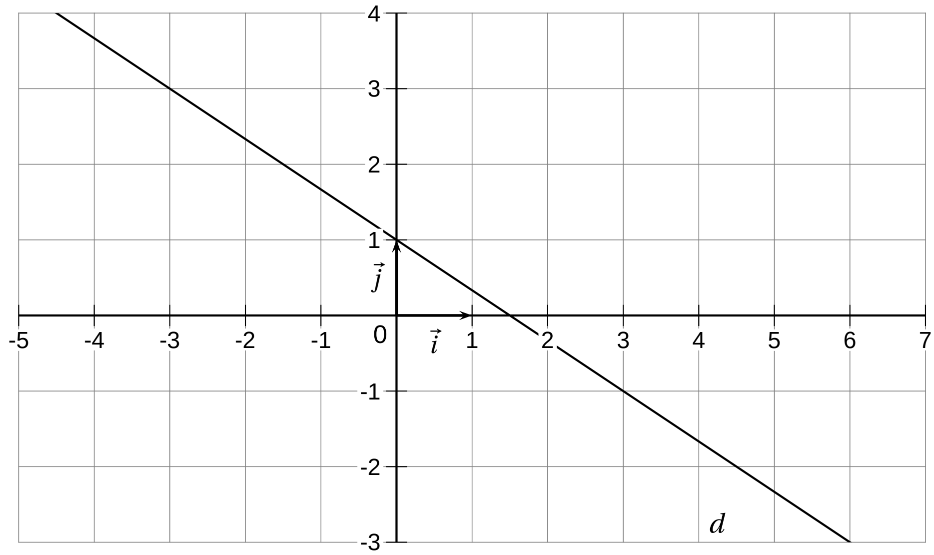
II-2 Equations de droite

Intéressons nous désormais au cas particulier des droites. On sait déjà que la courbe représentative d'une fonction affine est une droite. Donc certaines d'entre elles ont une équation du type $y = mx + p$.

Mais toutes les droites représentent-elles une fonction affine ? Sinon, de quelle forme est leur équation ? ?

De plus, y a-t-il une forme générale pour les équations de droites, et si oui, laquelle ? ?

***<u>Travail de l'élève</u>* 2.**



1. Soit la droite d représentée ci-dessus.
   - **a.** Déterminer graphiquement la fonction affine qu'elle représente.
   - **b.** Dire si les points suivants appartiennent à d ou non.

$$A\left(-1;\frac{5}{3}\right) \qquad B\left(100;-\frac{197}{3}\right) \qquad C\left(0;\frac{1}{3}\right) \qquad D(-3;3)$$

   - **c.** Calculer l'ordonnée du point E d'abscisse 0 appartenant à d.
   - **d.** Calculer l'abscisse du point F d'ordonnée 1 appartenant à d.
2. Soit la fonction affine f telle que $f(4) = 1$ et $f(0) = 5$.
   - **a.** Déterminer l'expression algébrique de f.
   - **b.** Quelle est sa courbe représentative (géométriquement) ?
   - **c.** La tracer dans le repère ci-dessus.

   d. Quelle son équation ?

3. Soit d' la droite passant par $K(3;2)$ et de coefficient directeur $\frac{1}{2}$.

   a. Tracer d' dans le repère ci-dessus.

   b. Trouver par le calcul les coordonnées du point d'intersection de d' avec l'axe des ordonnées.

   c. En déduire la fonction affine que d' représente, puis l'équation de d'.

4. Toutes les droites du plan sont-elles représentatives de fonction affine ?

5. Soient $A(2;0)$, $B(2;-15)$ et $E(2;2010)$.

   a. Les points A, B et C sont-ils alignés ?

   b. La droite (AB) est-elle représentative d'une fonction affine ?

   c. Soit $M(x;y)$ un point du plan. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur ses coordonnées pour que $M \in (AB)$.

   d. Construire dans le repère les droites d'équation $x=0$, $x=-3$ et $x=\frac{7}{2}$.

   e. Soit $c \in \mathbb{R}$ et $C(c;0)$. Donner une équation de la droite parallèle à l'axe des ordonnées et passant par C.

Rappel

Dans le plan muni d'un repère, une droite peut être :

– Soit parallèle à l'axe des ordonnées

– Soit sécante à l'axe des ordonnées : c'est alors la courbe représentative d'une fonction affine.

Propriété 2 :

– Une droite d, parallèle à l'axe des ordonnées a une équation du type $x=c$, où $c \in \mathbb{R}$.

– Une droite d sécante à l'axe des ordonnées a une équation de la forme $y=mx+p$, où m et p sont des nombres réels.

Finalement, on peut toujours écrire l'équation d'une droite sous la forme $ax+by=c$, où a, b et c sont trois nombres réels.

Remarque : Cela signifie qu'un point $M(x;y)$ appartient à d si et seulement si $y=mx+p$ (ou si et seulement si $ax+by=c$).

Définition 2 :

Une équation de la droite d, de la forme $y=mx+p$ est appelée **équation réduite** de d, m son **coefficient directeur** et p son **ordonnée à l'origine**.

Une équation de la droite d, de la forme $ax+by=c$ est appelée **équation généralisée** de d.

Remarque : L'équation réduite d'une droite, lorsqu'elle existe, est unique.
Par contre, il existe toujours une infinité d'équations généralisées d'une droite.

Exemple :

La droite d'équation réduite $y=3x+2$ est également caractérisée par l'équation généralisée $3x-y=-2$, ou encore par $6x-2y=-4$ ou encore $-3x+y=2$ etc.

Propriété 3 :
Dans un repère, on donne les points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ avec $x_A \neq x_B$.
Le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (AB).
Le coefficient directeur de (AB) est alors donné par :

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Remarque : Voir illustration p 176

Exemple :
Trouver l'équation réduite de la droite passant par $A(3;-1)$ et $B(-5;2)$.
Donner ensuite quatre équations généralisées de cette droite.

II-3 Intersection de droites

Propriété 4 :
Deux droites d'équation $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$ sont parallèles ssi $m = m'$.

Exemple :
Les droites d'équation $y = 36.5x - 54$ et $y = 36.5x + \pi$ sont parallèles.

Point d'intersection
Si deux droites $d : y = mx + p$ et $d' : y = m'x + p'$ ne sont pas parallèles (ie si $m \neq m'$), alors elles se coupent en un unique point. Ce point appartenant aux deux droites, ses coordonnées vérifient simultanément les deux équations des droites d et d'. Il s'agit donc de l'unique couple solution du système :

$$\begin{cases} y = mx + p \\ y = m'x + p \end{cases}$$

Remarques :
- Si $d // d'$ strictement alors le système n'admet pas de solution. En effet, s'il en admettait une, cela signifierait qu'il existe un couple de coordonnées qui vérifie les deux équations des droites simultanément, donc que le point correspondant appartient au deux droites, ce qui est impossible.
- Si d et d' sont parallèles confondues, alors elles ont la même équation réduite, donc il existe une infinité de solutions au système. En effet, tous les points de d' appartiennent à d et réciproquement.
- Il est clair que le principe énoncé est le même, peu importe la forme des équations des droites.

Exemple :
Trouver les coordonnées de l'éventuel point d'intersection de $d_1 : y = 3x + 5$ et $d_2 : y = -2x + 1$.
Même question pour d_1 et $d_3 : 4x + 2y - 1 = 0$, puis pour d_2 et d_3.

« *Il faut avoir une haute idée, non pas de ce qu'on fait, mais de ce qu'on pourra faire un jour ; sans quoi ce n'est pas la peine de travailler.* » EDGAR DEGAS.