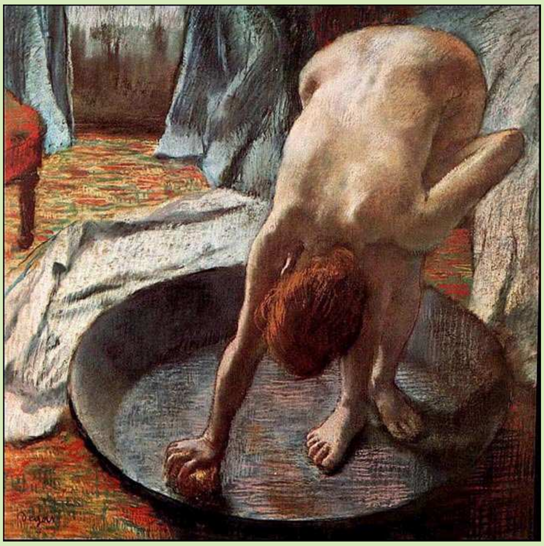
Chapitre 7

Fonctions de Référence

Hors Sujet



Titre : « Autoportrait (1863) » et « Le Tub (1885) »

Auteur : Edgar Degas

Présentation succinte de l'auteur : Edgar Degas (1834-1917) est un peintre français, en général rattaché au mouvement impressionniste, formé à la fin du XIXe siècle, en réaction à la peinture académique de l'époque.

Sa carrière fut dès le départ influencée par les danseuses. En 1874, il commence à se faire connaître, les critiques louant ou dénigrant le réalisme de son travail. Il explore des thèmes comme les repasseuses ou les femmes à leur toilette, multipliant les points de vue audacieux, recherchant des effets lumineux et colorés. Il dit d'ailleurs à propos de ses nus : « Jusqu'à présent, le nu avait toujours été représenté dans des poses qui supposent un public. Mais mes femmes sont des gens simples... Je les montre sans coquetterie, à l'état de bêtes qui se nettoient. »

A partir des années 1880, Degas va aussi poser la question d'une sculpture « impressionniste », réalisant des modèles en cire peints au naturel, qu'il accessoirise ensuite. Seule *La Grande Danseuse* (cf première page) fut présenté de son vivant, les autres modèles l'aidant surtout dans ses peintures. Cette incarnation de la grâce et de l'innocence trahit en réalité la fascination de Degas pour la criminalité. En effet, avec son visage est sculpté sur le modèle des physionomies de criminels définies à l'époque, et la danseuse était un parfait « petit rat », transmettant la syphilis aux bourgeois venant la voir ...

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : C. Aupérin
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée : Jules Fil (Carcassonne)

Table des matières

« *Quand quelqu'un paye un tableau* 3 000 *francs, c'est qu'il lui plaît.*
Quand il le paye 300 000 *francs, c'est qu'il plaît aux autres.* »
EDGAR DEGAS

Leçon 7

Fonctions de Référence

Au fil du temps

Nous avons déjà entrevu ce que sont les fonctions dans un cadre général, ainsi que le vocabulaire associé à cette notion et utile pour décrire les comportements des fonctions.
Dans ce chapitre, nous allons revoir tout cela (ensemble de définition, variations, signe, courbe représentative) mais en nous concentrant sur certaines fonctions dites « de référence » . Ces fonctions portent ce nom car leur expression algébrique est simple, ce qui les rend simples à étudier, et car grâce à elles et leurs propriétés, nous pourrons étudier par la suite des fonctions bien plus complexes, construites à partir de celles-ci.

Dans tout le chapitre, on se place dans un repère orthonormé du plan.

I) Les fonctions affines

Dans toutes cette partie, m et p désignent deux réels fixés.
Les définitions et résultats de cette partie ne sont que des rappels. Les démonstrations de cette partie ont déjà été traitées également.

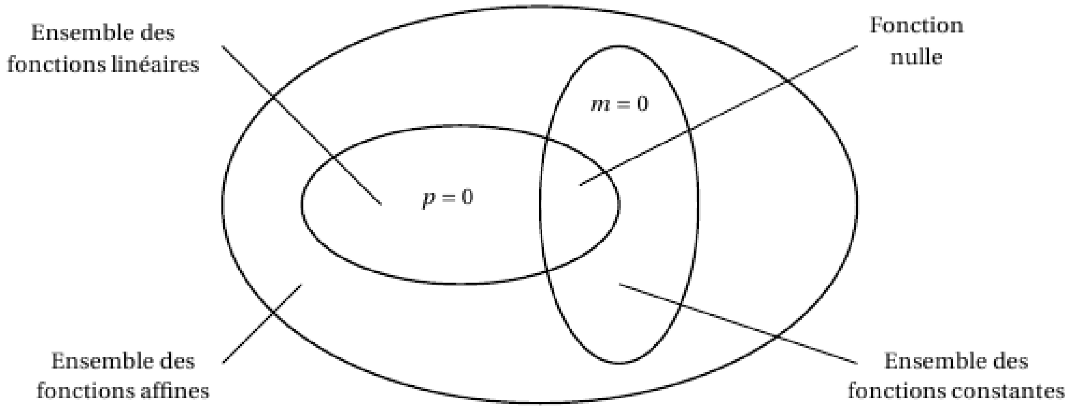
I-1 Définition

Définition 1 :

On appelle **fonction affine** toute fonction dont l'expression algébrique est de la forme $f(x) = mx + p$.

Remarques :

– L'expression algébrique d'une fonction affine ne comporte ni quotient, ni racine.
Son ensemble de définition est donc $\mathbb{R}$.
– Les fonctions affines pour lesquelles $p = 0$, donc du type $f(x) = mx$ sont appelées fonctions linéaires.
– Les fonctions affines pour lesquelles $m = 0$, donc du type $f(x) = p$ sont appelées fonctions constantes.



Exemples :

Les fonctions $f : x \mapsto -\pi x + \frac{2}{3}$, $g : x \mapsto 3$, $h : x \mapsto x$ et $k : x \mapsto -3(x-1)^2 + 3x^2$ sont affines.
En effet, pour les trois premières, c'est évident et pour la dernière, on a

$$k(x) = -3(x^2 - 2x + 1) + 3x^2 = -3x^2 + 6x - 3 + 3x^2 = 6x - 3$$

Ce qui est bien une expression du type affine.
Les fonctions $l : x \mapsto 3x^2 + 2$ et $n : x \mapsto \frac{3}{x} + 2$ ne le sont pas, car elles ne peuvent pas s'écrire sous la forme $mx + p$.

Exemple :

Trouver la fonction affine telle que $f(1) = 3$ et $f(-2) = -1$.
f est une fonction affine ce qui équivaut à dire qu'il existe deux réels m et p tels que pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = mx + p$. On a :

$$\begin{cases} f(1) = 5 \\ f(-2) = -1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} m \times 1 + p = 5 \\ m \times (-2) + p = -1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} p = 5 - m \\ -2m + (5 - m) = -1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} p = 5 - m \\ -3m = -6 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ p = 3 \end{cases}$$

La fonction affine f vérifiant $f(1) = 5$ et $f(-2) = -1$ est $f : x \mapsto 2x + 3$.
Vérification : L'image de -2 par f est $f(-2) = 2 \times (-2) + 3 = -1$ et l'image de 1 est $f(1) = 2 \times 1 + 3 = 5$.

Exercice 1 **:**

Déterminer la fonction affine f telle que $f(-2) = 9$ et $f(3) = -11$.
Déterminer la fonction linéaire g telle que $g(3) = 7$.

I-2 Sens de variation et Signe

Propriété 1 :

Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$.
- Si $m < 0$, alors f inverse l'ordre $\mathbb{R}$, ie f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$
- Si $m = 0$, alors f est constante sur $\mathbb{R}$
- Si $m > 0$, alors f est conserve l'ordre sur $\mathbb{R}$, ie f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Exemple :

On donne les fonctions f et g définies par $f(x) = -3x - \frac{5}{8}$, $g(x) = 87\,968x - \sqrt{5\,468}$.

1. Donner, sans calculatrice, l'ordre des images des nombres :

a. 1 et 5 **b.** $\sqrt{10}$ et $-\pi$ **c.** $2\sqrt{5}$ et $\sqrt{15}$

2. Donner, sans calculatrice, l'ordre des antécédents des nombres :

a. $-\frac{45}{987}$ et $-\frac{45}{65498}$ **b.** $\sqrt{180}$ et $2\sqrt{98}$ **c.** $\frac{3^4 \times 5^{13}}{15^7}$ et $\frac{5^3 \times 3^{10}}{15^{10}}$

Exercices du livre :

14 à 16 p 69

Propriété 2 :

Soit f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$ avec $m \neq 0$. Alors :

x	$-\infty$	$-\frac{p}{m}$	$+\infty$
Signe de $mx+p$	Signe Opposé de m	0	Signe de m

On peut alors résumer les variations et le signe d'une fonction affine en fonction du signe de m.

$m < 0$

x	$-\infty$	$-\frac{p}{m}$	$+\infty$
Variations de f	$\searrow$	0	$\searrow$
Signe de $f(x)$	$+$	0	$-$

$m > 0$

x	$-\infty$	$-\frac{p}{m}$	$+\infty$
Variations de f	$\nearrow$	0	$\nearrow$
Signe de $f(x)$	$+$	0	$-$

Exemple :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\frac{3}{4}x + 3$. Donner son tableau de variation et son tableau de signe.

f est unne fonction affine et on a $m = -\frac{3}{4}$ donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
Pour établir son tableau de signe, nous devons résoudre :

$$f(x) = 0 \iff -\frac{3}{4}x + 3 = 0 \iff -\frac{3}{4}x = -3 \iff x = -3 \times \left(-\frac{4}{3}\right) = 4$$

Nous pouvons désormais donner le tableau de variation et de signe de f

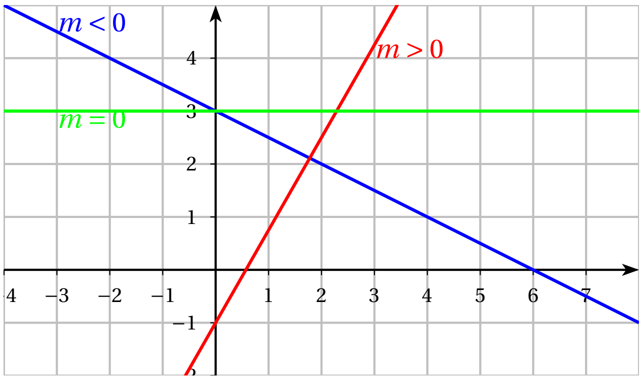
x	$-\infty$	4	$+\infty$
Variation de f	$\nearrow$	0	$\nearrow$
Signe de $-\frac{3}{4}x+3$	$+$	0	$-$

Exercices du livre :

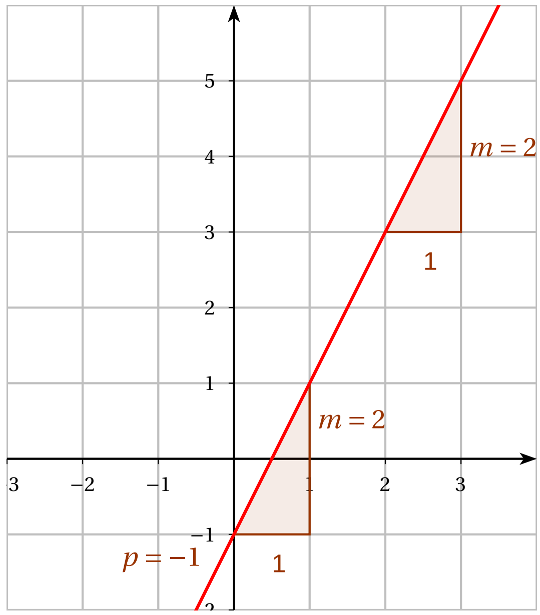
17-18 p 67

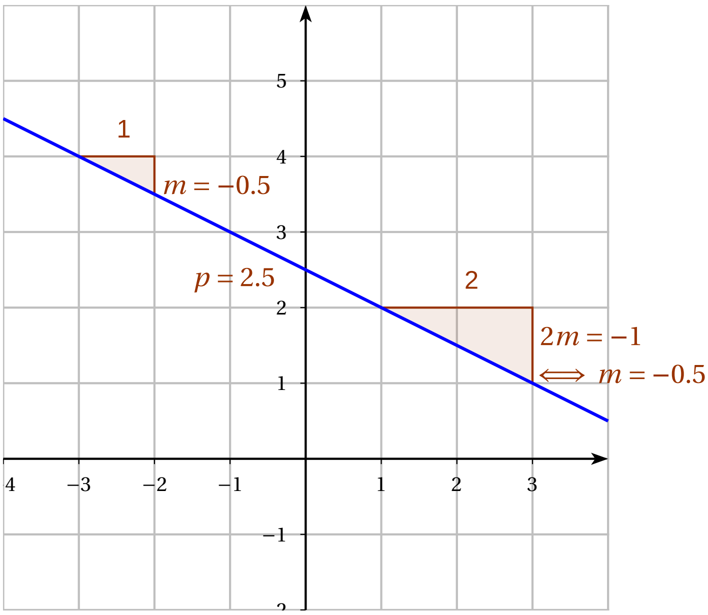
I-3 Représentation graphique

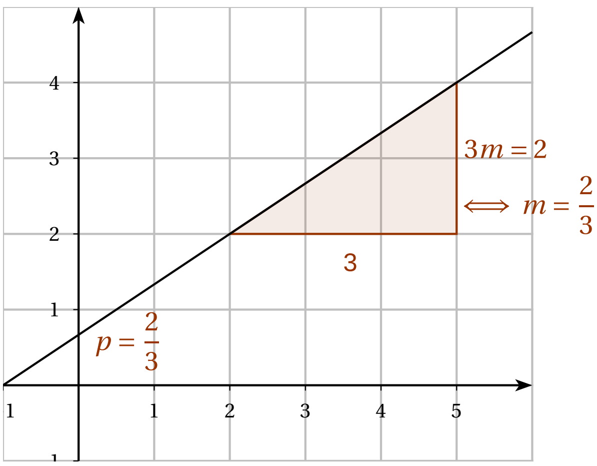
Propriété 3 : *Définition*
La représentation graphique d'une fonction affine est une droite. Son équation réduite est $y = mx + p$.
m est appelé le **coefficient directeur** et p l'**ordonnée à l'origine**.



Interprétation graphique
Comme le dit son nom, le coefficient directeur donne la direction de la droite. Ainsi, il s'agit de la valeur du « déplacement » en ordonnée correspondant à un « déplacement » en abscisse de $+1$ unité.
L'ordonnée à l'origine correspond à l'ordonnée du point d'intersection de la droite et de l'axe des ordonnées.







Remarque : Notons que les déplacements en abscisse et en ordonnée sont proportionnels. Ainsi, si l'on se déplace de $+2$ unités en abscisse, on se déplacera de deux fois le coefficient directeur en ordonnée, et ce, peu importe l'endroit d'où l'on part.
On peut également constater que si l'on choisit un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite (n'importe lequel) et que l'on lit ses coordonées $x_{\vec{u}}$ et $y_{\vec{u}}$, alors

$$m = \frac{y_{\vec{u}}}{x_{\vec{u}}}$$

En particulier, si l'on a deux points $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ de la droite, alors $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite. Ses coordonnées sont $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ et l'on a donc $\boxed{m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$.

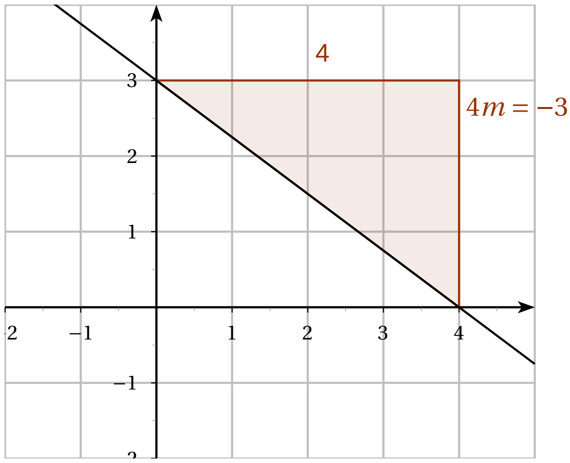
Méthode pour tracer la représentation graphique d'une fonction affine

On a donc deux méthodes :

- Choisir deux nombres x_1 et x_2, calculer leurs images $f(x_1)$ et $f(x_2)$, placer les points de coordonnées $(x_1;f(x_1))$ et $(x_2;f(x_2))$ dans un repère, puis les relier à la règle.
- Placer le point sur l'axe des ordonnées par lequel passe la droite grâce à l'ordonnée à l'origine p, puis tracer la droite en utilisant l'interprétation graphique du coefficient directeur m.

Exemple :

Reprenons la fonction f de l'exemple précédent, définie par $f(x) = -\dfrac{3}{4}x + 3$. Elle a pour représentation graphique



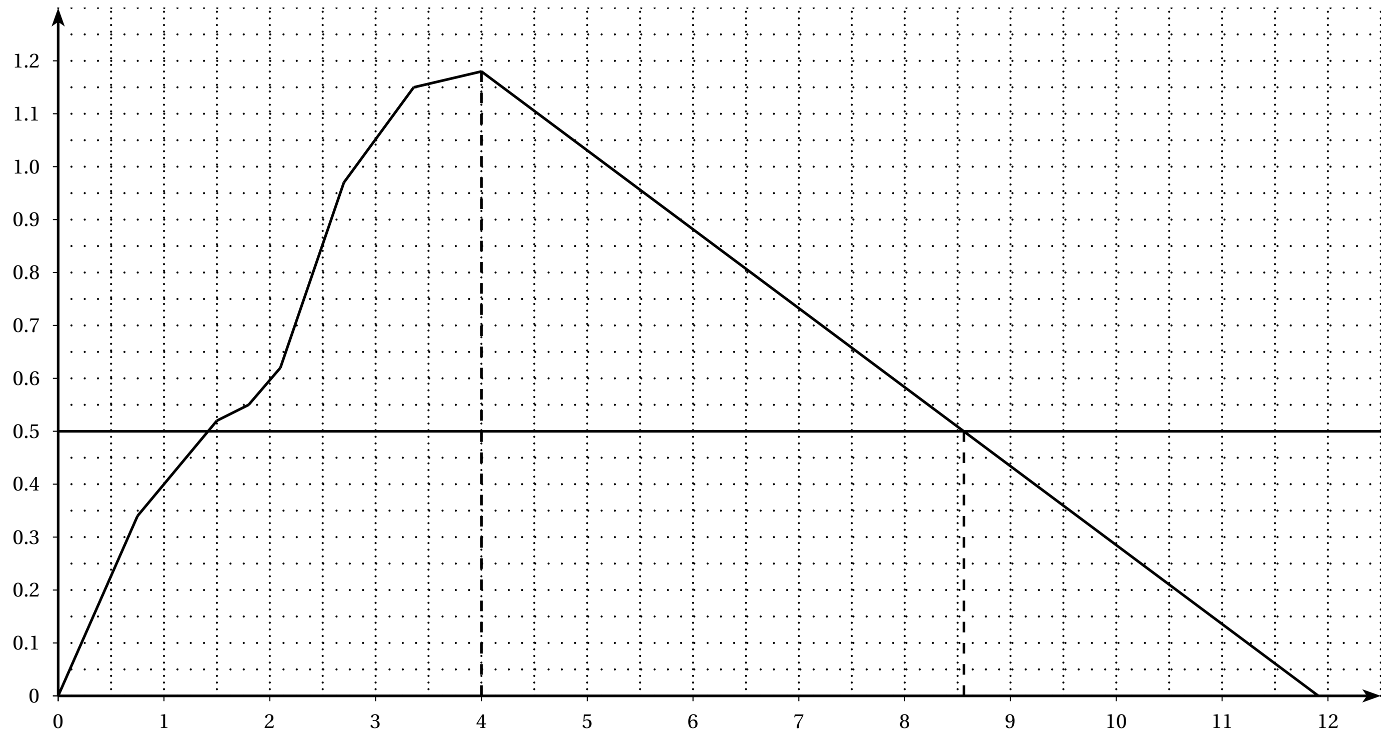
Exercice 2 :

1. Trouver le coefficient directeur puis l'ordonnée à l'origine de la droite passant par $A(2;-1)$ et $B(3;5)$. En déduire l'expression de la fonction affine représentée par cette droite.
2. Même question pour les points $C(-1,2)$ et $D(3;-1)$.
3. Trouver les coordonnées du point d'intersection des droites (AB) et (CD).

Exercice 3 :

Sur le site internet de la maaf, on peut étudier la courbe de notre taux d'alcoolémie, en fonction de divers paramètres (sexe, âge, taille, poids, consommation d'alcool, repas, heure).

1. Trouver ce site internet et faire divers tests en changeant les paramètres.
2. Rentrer ensuite les paramètres suivants :
   - Sexe : Homme
   - Age : 16 ans
   - Poids : 65 kg
   - Taille : 170 cm
   - Consommations :
     - A 19h00, 19h30 et 20h00 : 1 Pastis (43°)
     - A 20h30, 20h45 et 21h00 : 1 Bière (5°)
     - A 20h15 : 1 Casse-croute
     - A 21h30 et 22h00 : 1 verre de Vin (12°)
3. Décrire l'allure de la courbe obtenue.
4. Déterminer graphiquement l'expression affine de chacun des morceaux de droites composant la courbe obtenue, reproduite ci-dessous, en précisant pour quelles valeurs de t ils sont valables.



Exercices du livre :

5-6-7 p 60

Exercices du livre :

33 p 71 + 26 p 69 + 20 p 68 (Algorithme de tracé à faire en module)

II) Fonction carré et associées

II-1 La fonction $x \mapsto x^2$

Travail de l'élève **1.** Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

1. Soient a et b deux nombres positifs.

- **a.** Etudier le signe de $b^2 - a^2$.
- **b.** En déduire l'ordre de a^2 et b^2.
- **c.** Que pouvez-vous en déduire sur le sens de variation de la fonction $x \mapsto x^2$ sur les positifs ?

2. Soient a et b deux nombres négatifs.

- **a.** Etudier le signe de $b^2 - a^2$.
- **b.** En déduire l'ordre de a^2 et b^2.
- **c.** Que pouvez-vous en déduire sur le sens de variation de la fonction $x \mapsto x^2$ sur les négatifs ?

3.

- **a.** Trouver un exemple pour $a < 0$ et $0 < b$ tels que $a^2 < b^2$.
- **b.** Trouver un exemple pour $a < 0$ et $0 < b$ tels que $a^2 > b^2$.
- **c.** Que pouvez-vous en déduire sur la comparaison des carrés de deux nombres de signe différent ?

Définition 2 :

On appelle fonction carré la fonction définie par $f(x) = x^2$.

Remarque : La fonction carrée ne possède ni quotient, ni racine, elle est définie sur $\mathbb{R}$.

Exercices du livre :

2-3-4-5-6 p 84 (images) + 8-10 p 84 (antécédents)

Propriété 4 :

La fonction carrée est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ et strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

On sait également qu'un carré est toujours positif. On peut alors dresser le tableau de variations et de signes de la fonction carrée :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Variations de f		$\searrow$	0	$\nearrow$	
Signe de x^2		$+$	0	$+$	

D'après le tableau de variations, la fonction carrée admet 0 comme minumum sur $\mathbb{R}$, atteint en 0.

Exemple :

Dans chaque cas, comparer les nombres suivants sans les calculer :

1. $(2.3)^2$ et $(2.15)^2$
2. $(-1.002)^2$ et $(-0.999)^2$
3. π^2 et $(\pi-1)^2$
4. $(2-\sqrt{7})^2$ et $(2-\sqrt{5})^2$

Exercice 4 **:**

1. Soit x un réel tels que $2 \leq x \leq 4$. Donner un encadrement de $-3x^2$.
2. Soit y un réel tels que $-9 \leq y \leq -2$. Donner un encadrement de de $\dfrac{y^2}{5}$.
3. Soit z un réel tels que $-9 \leq z \leq 1$. Donner un encadrement de de z^2.
4. Soit t un réel tels que $0 \leq \sqrt{-5t-1} \leq 2$. Donner un encadrement de t.

Exercices du livre :

16-17-18-19-20-21 p 84-85

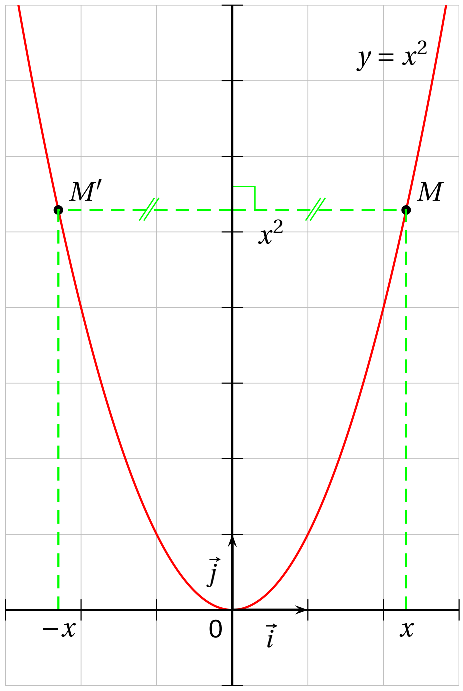
Définition 3 :

La courbe représentative de la fonction carrée est appelée **parabole** de sommet l'origine du repère.

On esquisse la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction carrée sur $\mathbb{R}^+$ en s'appuyant sur un tableau de valeurs.

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	...
$f(x)$	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$	4	$\frac{25}{4}$	$\frac{1}{4}$	1	...

Remarque : On sait qu'un carré est toujours positif. La courbe représentative de la fonction carré est donc toujours au-dessus de l'axe des abscisses.



Exercice 5 :

Tracer sur l'écran d'une calculatrice graphique les courbes de la fonction carré et de la fonction affine définie par $f(x) = x$.

Comparer alors un réel et son carré. Justifier les réponses.

Exercice 6 :

1. Dans un repère orthogonal, tracer la courbe représentative de la fonction carré sur l'intervalle $[-3;3]$, puis celle de la fonction affine $x \mapsto -x+2$.
2. Par lecture graphique, déterminer les coordonnées des points d'intersection de ces deux courbes.
3. Développer $(x+2)(x-1)$.
4. Retrouver les solutions de la première question par le calcul.

Exercices du livre :

7 p 84 + 11 à 14 + 23 à 25 p 85

Propriété 5 :
La courbe de la fonction carré est *symétrique* par rapport à l'axe des ordonnées.
On dit que la fonction est **paire**. Cela se traduit par les condtions :
- L'ensemble de définition $\mathscr{D}$ est symétrique par rapport à 0.
- Pour tout $x \in \mathscr{D}$ on a $f(-x) = f(x)$.

Preuve

Pour tout nombre réel x le point $M(x;x^2)$ est sur la parabole $\mathscr{P}$ représentative de la fonction carré.
Son symétrique par rapport à l'axe des ordonnées est $M'(-x;x^2)$.
Or ce point M' est lui aussi sur $\mathscr{P}$ car $(-x)^2 = x^2$.

II-2 Fonctions polynômes de degré 2

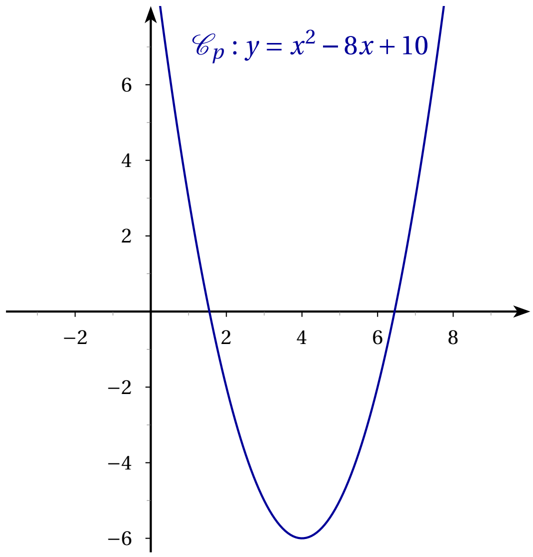
II-2.1 Problème d'introduction

Problème :
On connait l'aire $\mathscr{A} = 10$ cm^2 et le périmètre $\mathscr{P} = 16$ cm d'un rectangle. Peut-on déterminer les longueurs des côtés de ce rectangle.

Solution :
Si on note x et y les longueurs des deux côtés cherchés alors :

$$xy = 10 \qquad \text{et} \qquad x + y = 8 \Longleftrightarrow y = 8 - x$$

Ainsi $x(8-x) = 10 \Longleftrightarrow 8x - x^2 = 10 \Longleftrightarrow x^2 - 8x + 10 = 0$.
En posant $P(x) = x^2 - 8x + 10$. On est amené à rechercher les éventuels antécédents de 0. A l'aide de la calculatrice et de la représentation graphique de la fonction P on peut déjà avoir une idée de la réponse :



0 a deux antécédents par P, qui sont approximativement $1,5$ et $6,5$.
Si $x = 1,5$ et $y = 6,5$, on obtient $xy = 9,75$ et $x + y = 8$, ce qui semble être une bonne approximation.
Mais ne pourrait-on pas trouver les solutions exactes par le calcul ? ?

II-2.2 Forme développée

Travail de l'élève **2.**
Partie A : A l'aide de Géogébra, on crée trois curseurs a, b et c vairant entre -5 et 5 avec un pas de 0.05.
Dans la ligne de saisie, on tape l'expression $f(x) = a * x^2 + b * x + c$

1. Reproduire cette construction.
2. Faire varier successivement les trois curseurs.
3. Quelles conjectures peut-on faire quant à l'influence de chacun des coefficients a, b et c sur la représentation graphique de f ?
4. Conjecturer, à l'aide du logiciel, le tableau de variations et le tableau de signes des fonctions f et g suivantes :

$$f(x) = 1.5x^2 - 3x - 4.5 \qquad\qquad g(x) = -0.25x^2 - 0.5x + 0.75$$

Partie B : A l'aide de Géogébra, on crée trois curseurs a, α et β variant entre -5 et 5 avec un pas de 0.1. Dans la ligne de saisie, on tape l'expression $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$.

1. Reproduire cette construction.
2. Faire varier successivement les trois curseurs.
3. Quelles conjectures peut-on faire quant à l'influence de chacun des coefficients a, α et β sur la représentation graphique de f ?
4. Vérifier par le calcul que $f(x) = 1.5(x-1)^2 - 6$ et que $g(x) = -0.25(x+1)^2 + 1$
5. Justifier alors les extremums des fonctions f et g, établis graphiquement dans la partie A.

Partie C :

1. Vérifier par le calcul que $f(x) = 1.5(x-3)(x+1)$ et que $g(x) = -0.25(x-1)(x-5)$
2. Justifier alors les tableaux de signes des fonctions f et g établis à la partie A.
3. **Application** : on définit la fonction h sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -3x^2 + 12x + 36$.
   - **a.** Vérifier par le calcul que $h(x) = -3(x-2)^2 + 48$ et $h(x) = -3(x-6)(x+2)$.
   - **b.** En utilisant la forme la plus appropriée, établir le tableau de variations et de signes de la fonction h, sans regarder sa courbe représentative.

Dans toute cette partie, a, b et c désignent des réels fixés avec $a \neq 0$.

Définition 4 :

On appelle fonction polynôme de degré 2 toute fonction de la forme $x \mapsto ax^2 + bx + c$.
On appelle cette écriture la **forme développée** de f.

Remarque : Ces fonctions n'ont ni racine ni quotient, elles sont définies sur $\mathbb{R}$.

Exemple :

La fonction P définie par $P(x) = x^2 - 8x + 10$ est une fonction polynôme de degré 2.
Les fonctions affines ne sont pas des fonctions polynômes. Elles sont obtenues pour $a = 0$, on parle de fonction polynôme de degré 1.

Remarque : $f(x) = ax^2 + bx + c$ est la forme développée de la fonction polynôme f. Elle est pratique pour :
- déterminer l'image de 0 : $f(0) = c$.
- déterminer les antécédents éventuels de c :

$$f(x) = c \Longleftrightarrow ax^2 + bx = 0 \Longleftrightarrow x(ax+b) = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -\frac{b}{a}$$

Exercice 7 **:**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x-1)(x+2)$.

1. Démontrer que f est une fonction polynôme de degré 2.
2. Calculer l'image de 0 par f.
3. Déterminer les antécédents éventuels de -2 et de 0 par f.

Exercices du livre :

27 p 107

II-2.3 Forme canonique et extremum

Propriété 6 : *Définition*

Pour toute fonction polynôme de degré 2 $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$, il existe deux réels α et β uniques tels que pour tout réel x on a $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$.

On appelle cette écriture la **forme canonique** de f.

Preuve

Si f est une fonction polynôme de degré 2 alors il existe $a \neq 0$ et deux réels b et c tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$$

Remarquons que $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + 2 \times \dfrac{b}{2a}x + \dfrac{b^2}{4a^2} = x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{b^2}{4a^2} \Longleftrightarrow \left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2}{4a^2} = x^2 + \dfrac{b}{a}x$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$ on a :

$$f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

En posant $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = -\dfrac{b^2}{4a} + c$, on obtient le résultat désiré.

Exemples :

$3x^2 - 12x + 5 = 3(x-2)^2 - 7$ et $-2x^2 - 2x = -2\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{2}$

Remarque : Le premier intérêt de la forme canonique est de déduire un extremum de la fonction f.

En effet, si $a > 0$ alors :

$$(x-\alpha)^2 \geq 0 \Longleftrightarrow a(x-\alpha)^2 \geq 0 \Longleftrightarrow a(x-\alpha)^2 + \beta \geq \beta$$

De pus $f(\alpha) = a(\alpha - \alpha) + \beta = \beta$. Ce qui prouve que β est le minimum de f atteint pour $x = \alpha$.

Si $a < 0$ alors :

$$(x-\alpha)^2 \geq 0 \Longleftrightarrow a(x-\alpha)^2 \leq 0 \Longleftrightarrow a(x-\alpha)^2 + \beta \leq \beta$$

De pus $f(\beta) = a(\alpha - \alpha) + \beta = \beta$. Ce qui prouve que β est le maximum de f atteint pour $x = \alpha$.

Exercice 8 **:**

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'extremum de f, on précisera s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum et pour quelle valeur de x il est atteint.

1. $f(x) = -3(x-1)^2 + 2$
2. $f(x) = 4(x+2)^2 - 5$
3. $f(x) = -2x^2 + 1$
4. $f(x) = 7\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2$
5. $f(x) = -(x + 1 - \sqrt{2})^2 + 1.$

Propriété 7 :
Les variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto a(x-\alpha)^2+\beta$ sont de deux types, suivant le signe de a.

– Si $a>0$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	↘	β	↗

– Si $a<0$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	↗	β	↘

Preuve

La fonction f est définie par l'enchaînement :

$$x \longmapsto x-\alpha \longmapsto (x-\alpha)^2 \longmapsto a(x-\alpha)^2 \longmapsto a(x-\alpha)^2+\beta$$

Considérons le cas $a<0$. Soient $x_1<x_2<\alpha$. Regardons l'ordre de leurs images par f.

$$\begin{aligned}
x_1<x_2<\alpha &\iff x_1-\alpha<x_2-\alpha<0\\
&\iff (x_1-\alpha)^2>(x_2-\alpha)^2>0 \quad \text{(la fonction carré est décroissante sur les négatifs)}\\
&\iff a(x_1-\alpha)^2<a(x_2-\alpha)^2<0 \quad \text{(multiplier par un nombre négatif change l'ordre)}\\
&\iff a(x_1-\alpha)^2+\beta<a(x_2-\alpha)^2+\beta<\beta\\
&\iff f(x_1)<f(x_2)<\beta
\end{aligned}$$

L'ordre est inchangé, donc la fonction f est croissante sur $]-\infty;\alpha[$.
On peut faire de même pour $x_1>x_2>\alpha$.

$$\begin{aligned}
x_1>x_2>\alpha &\iff x_1-\alpha>x_2-\alpha>0\\
&\iff (x_1-\alpha)^2>(x_2-\alpha)^2>0 \quad \text{(la fonction carré est croissante sur les positifs)}\\
&\iff a(x_1-\alpha)^2<a(x_2-\alpha)^2<0 \quad \text{(multiplier par un nombre négatif change l'ordre)}\\
&\iff a(x_1-\alpha)^2+\beta<a(x_2-\alpha)^2+\beta<\beta\\
&\iff f(x_1)<f(x_2)<\beta
\end{aligned}$$

L'ordre est inversé. Donc la fonction f est décroissante sur $]\alpha;+\infty[$.

Exemples :

Les fonctions f et g sont définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^2+28x+87$ et $g(x)=-x^2-2x$

– Vérifier que pour tout réel x on a $f(x)=2(x+7)^2-11$ et $g(x)=-(x+1)^2+1$.
– En déduire les tableaux de variations de f et g.
– Contrôler les résultats à la calculatrice.

Exemple :

Justifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -3x^2 + 6x + 2$ admet le tableau de variations ci-dessous :

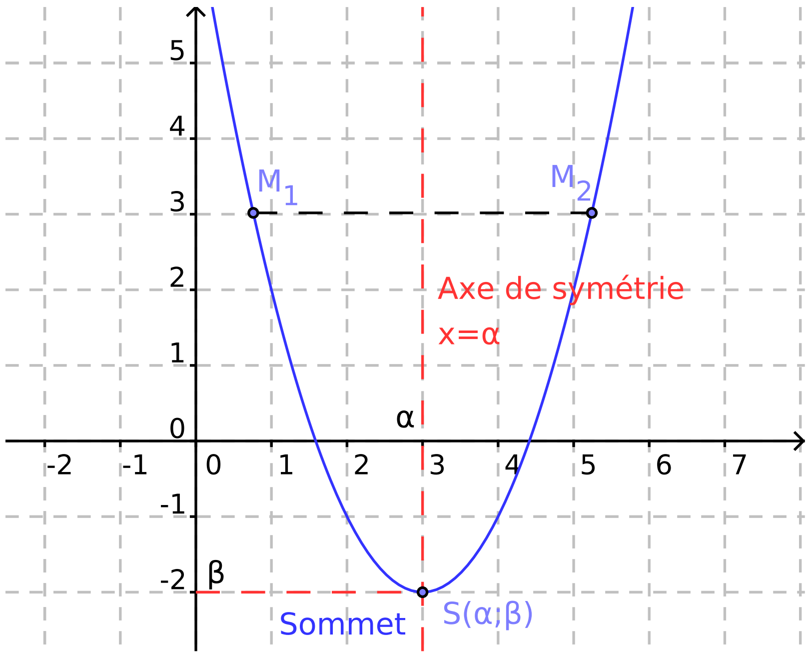
x	$-\infty$	1	$+\infty$
$h(x)$	↗	5	↘

Proposition 1 : *Définition*

La représentation graphique de la fonction $x \mapsto a(x-\alpha)^2 + \beta$ est une parabole de sommet $S(\alpha;\beta)$.

- Si $a > 0$, la parabole est tournée vers le haut.
- Si $a < 0$, la parabole est tournée vers le bas.

La parabole a pour axe de symétrie la droite passant par S et parallèle à l'axe des ordonnées.



Remarque : Si deux points de la parabole M_1 et M_2 d'abscisse x_1 et x_2 ont la même ordonnée, alors le sommet S a pour abscisse $\alpha = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$.

Exemple :

On note $\mathscr{P}$ la parabole représentant la fonction $f : x \mapsto ax^2 + 3x - 4$ dans un repère orthogonal.

1. Calculer le réel a sachant que la parabole $\mathscr{P}$ passe par le point $A(3;-4)$
2. Déterminer un autre point de $\mathscr{P}$ d'ordonnée -4.
3. En déduire les coordonnées du sommet de la parabole $\mathscr{P}$ puis la forme canonique de f.
4. Etablir le tableau de variations de la fonction f.

Exercices du livre :

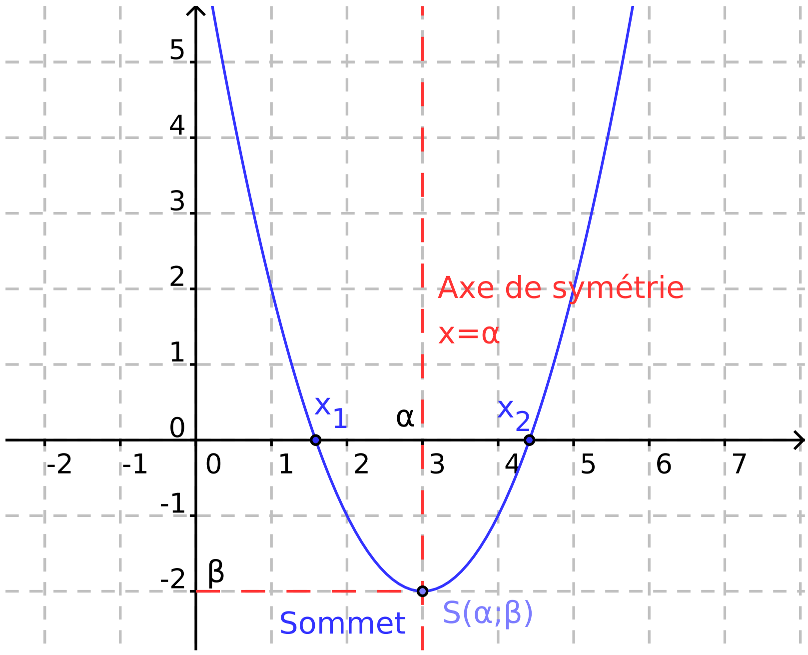
2-3-4-8-10 p 104 + 26 p 107

II-2.4 Forme factorisée et signe

Propriété 8 : *Définition*

Lorsque la parabole représentative d'une fonction polynôme de degré 2 $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$, coupe l'axe des abscisses en $(x_1;0)$ et $(x_2;0)$, alors $f(x)$ peut se factoriser et on a :

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$



Remarque : Cette troisième écriture est utile pour résoudre l'équation produit nul $f(x) = 0$ ou étudier le signe de $f(x)$, ce que l'on a déjà vu dans un chapitre précédent.

Grâce à l'orientation de la parabole, on peut même déduire le tableau de signe général suivant :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		Signe de a	0	Opposé de a	0	Signe de a	

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2\left(x - \frac{3}{4}\right) + \frac{25}{8}$.

1. Montrer que $f(x) = -2x^2 + 3x + 2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que $f(x) = (2x + 1)(-x + 2)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. En utilisant la forme la plus adéquate, répondre aux questions suivantes :
   a. Dresser le tableau de variation de f.
   b. Dresser le tableau de signe de f.

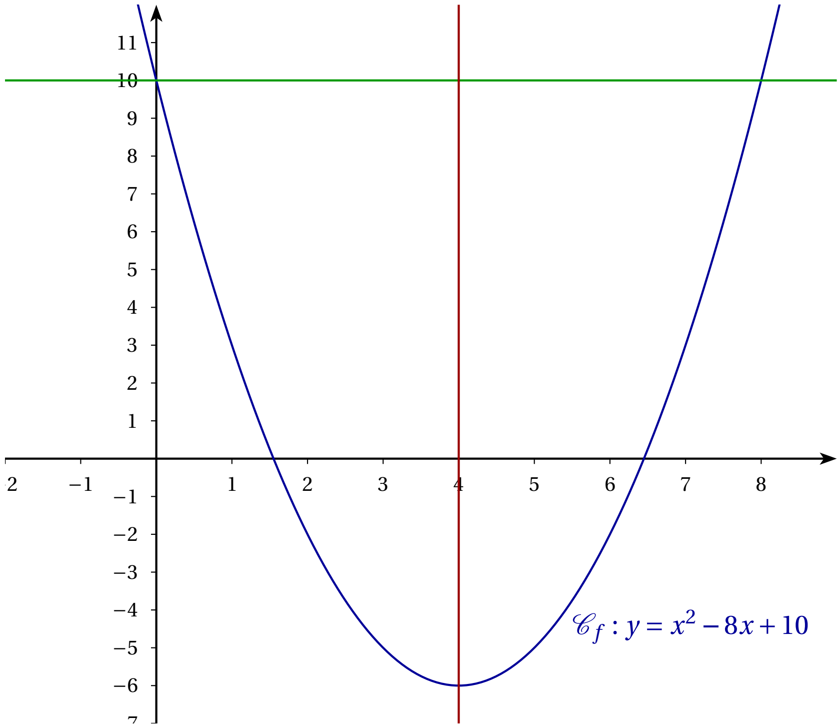
Exercices du livre :
15 à 18 p 105 (études fonctions, choix de forme)
50-52-53 p 111 (corrigés)
15-19 p 120 + 34-35 p 123 (inéquations)

II-3 Retrouver la forme canonique et l'éventuelle forme factorisée d'une fonction polynôme de degré 2

Exemple :
On reprend la fonction du problème d'introduction $f(x) = x^2 - 8x + 10$. Retrouvons la forme canonique de f.
Déterminons les antécédents éventuels de 10 :

$$x^2 - 8x + 10 = 10 \Longleftrightarrow x^2 - 8x = 0 \Longleftrightarrow x(x-8) = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 8$$

Ainsi on a $f(8) = 10 = f(0)$. Graphiquement on a une situation du type :



Clairement $\alpha = \dfrac{8+0}{2} = 4$, $a = 2$ et β est le minimum de f atteint lorsque $x = 4$.
Calculons $f(4) = 4^2 - 8 \times 4 + 10 = 16 - 32 + 10 = -6$.
En conclusion on obtient :

$$f(x) = (x-4)^2 - 6$$

A partir de là, nous pouvons donc écrire que $f(x) = (x-4)^6 - (\sqrt{6})^2 = \left(x - 4 - \sqrt{6}\right)\left(x - 4 + \sqrt{6}\right)$.
Donc $f(x) = 0 \iff x - 4 - \sqrt{6} = 0$ ou $x - 4 + \sqrt{6} = 0 \iff x = 4 + \sqrt{6}$ ou $x = 4 - \sqrt{6}$.
Le rectangle a donc pour dimension $4 + \sqrt{6}$ et $4 - \sqrt{6}$.
Remarque : La factorisation est impossible si β est positif, car alors l'identité remarquable n'a plus lieu d'être...

III) Fonction inverse et associées

III-1 La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$

Travail de l'élève **3.** Soient a et b deux réels strictement positifs tels que $a < b$.

1. Vérifier que $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}$
2. Etudier le signe de $\frac{b-a}{ab}$.
3. En déduire l'ordre de $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$.

Définition 5 :

On appelle fonction inverse la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x}$.

Remarque : La fonction inverse possède un quotient, mais pas racine. Son quotient existe dès que $x \neq 0$ donc elle est définie sur $\mathbb{R}^*$.

Exercices du livre :

26 à 28 p 85 + 30 - 31 p 86

Propriété 9 :

La fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{*-}$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{*+}$.

Preuve

Voir l'activité pour les positifs. On procède de même sur les négatifs.

On sait qu'un nombre et son inverse son de même signe. On peut alors dresser le tableau de variations et de signe de la fonction inverse :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variation de f	↘	‖	↘
Signe de $\frac{1}{x}$	$-$	‖	$+$

D'après le tableau de variations, la fonction inverse n'admet pas d'extremum sur $\mathbb{R}^*$.

Exemple :

Dans chaque cas, comparer les nombres suivants sans les calculer :

1. $\frac{1}{-0.012}$ et $\frac{1}{-0.099}$
2. $\frac{1}{\pi-3}$ et $\frac{1}{0.21}$
3. $\frac{1}{\pi-3}$ et $\frac{1}{-0.21}$
4. $\frac{1}{2-\sqrt{7}}$ et $\frac{1}{2-\sqrt{5}}$

Exercices du livre :

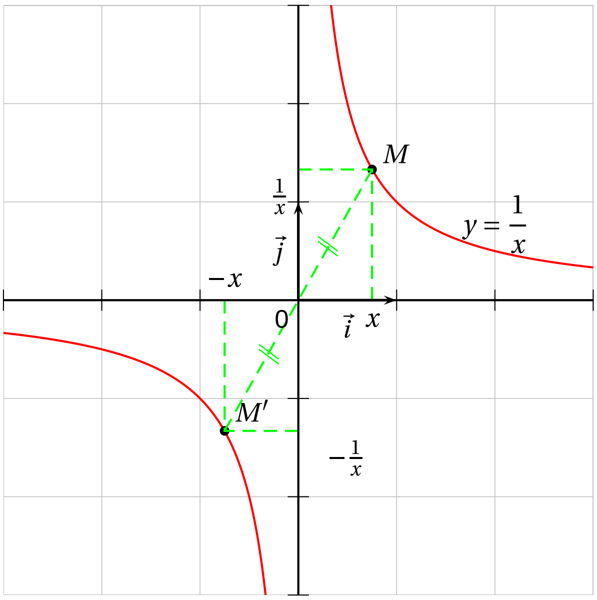
36 à 42 p 86

Définition 6 :

Dans un repère orthogonal, la courbe repésentative de la fonction inverse est appelée **hyperbole**.

On esquisse la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^{+*}$ en s'appuyant sur un tableau de valeurs :

x	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	-1	-2	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$
$f(x)$	3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	-1	$-\frac{1}{2}$	-2	-3



Exercices du livre :

29 p 85 + 35 - 44 à 46 p 86

Exercice 9 **:**

Tracer sur l'écran d'une calculatrice graphique les courbes de la fonction inverse et de la fonction affine définie par $f(x) = x$.

Comparer alors un réel non nul et son inverse. Justifier les réponses.

Propriété 10 :

La courbe de la fonction inverse est *symétrique* par rapport à l'origine du repère.

On dit que la fonction est **impaire**. Cela se traduit par les conditions :

- L'ensemble de définition $\mathscr{D}$ est symétrique par rapport à 0
- Pour tout $x \in \mathscr{D}$, on a $f(-x) = -f(x)$

Preuve

Pour tout nombre réel $x \neq 0$ le point $M\left(x; \frac{1}{x}\right)$ est sur la hyperbole $\mathscr{H}$ représentative de la fonction inverse.

Son symétrique par rapport à l'origine du repère est $M'\left(-x; -\frac{1}{x}\right)$.

Or ce point M' est lui aussi sur $\mathscr{H}$ car $\dfrac{1}{-x} = -\dfrac{1}{x}$.

III-2 Fonctions homographiques

Définition 7 :

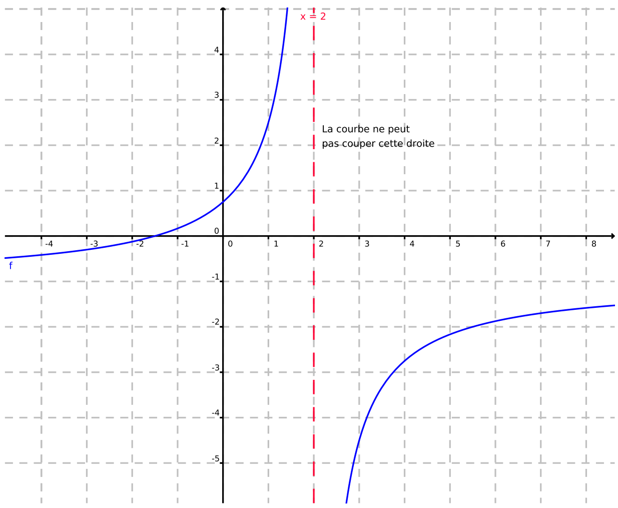
On appelle fonction homographique toute fonction de la forme $x \longmapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$, où a, b, c et d sont des réels fixés avec $c \neq 0$ et $a \times d \neq b \times c$.
La courbe représentative s'appelle une **hyperbole**.

Remarques :

- La condition $ad \neq bc$ traduit le fait que $ax+b$ et $cx+d$ ne sont pas proportionnels.
- L'expression algébrique d'une fonction homographique contient un quotient. Elle n'existe que si le dénominateur $cx+d$ est différente de 0, ie $x \neq -\dfrac{d}{c}$.
  L'ensemble de définition est donc $\mathscr{D} \left]-\infty;-\dfrac{d}{c}\right[\cup \left]-\dfrac{d}{c};+\infty\right[$
- Grâce aux tableaux de signes, on sait déjà étudier le signe d'une fonction homographique.
  Attention cependant à ne pas oublier d'indiquer la valeur interdite !

Exemple :

La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{2x+3}{-2x+4}$ a pour ensemble de définition $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$.
La courbe représentative de f dans un repère est formée de deux branches distinctes, séparée par la droite d'équation $x = 2$.



Exemple :

Pour résoudre l'inéquation $\frac{3-x}{4x-1} > 0$:

– On commence par résoudre

$$\frac{3-x}{4x-1} > 0 \iff 3-x=0 \text{ et } 4x-1 \neq 0 \iff x=3 \text{ et } x \neq \frac{1}{4} \quad \textbf{(VI)}$$

– Ensuite on étudie le signe du quotient $\frac{3-x}{4x-1}$, en procédant comme dans l'activité.

x	$-\infty$		$\frac{1}{4}$		3		$+\infty$
Signe de $3-x$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $4x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $\frac{3-x}{4x-1}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Vérifier graphiquement.

Exercice 10 :

1. Ecrire l'algorithme de calcul de la fonction f définie sur $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{-5}{(x-2)^2} + 3$$

2. Soient a et b appartenant à $]-\infty;2[$ tels que $a < b$.
En utilisant l'algorithme ci-dessus et les variations des fonctions de référence, comparer $\frac{-5}{(a-2)^2} + 3$ et $\frac{-5}{(b-2)^2} + 3$

3. En déduire si f conserve ou inverse l'ordre sur $]-\infty;2[$.

4. En suivant la même démarche, dire si f conserve ou inverse l'ordre sur $]2;+\infty[$.

5. En déduire le tableau de variations de f.

Exercices du livre :

22 à 31 p 121

Exercices du livre :

20-21 p 105 + 46-48-49-50-51 p 125

« *Il faut avoir une haute idée, non pas de ce qu'on fait, mais de ce qu'on pourra faire un jour ; sans quoi ce n'est pas la peine de travailler.* » EDGAR DEGAS.