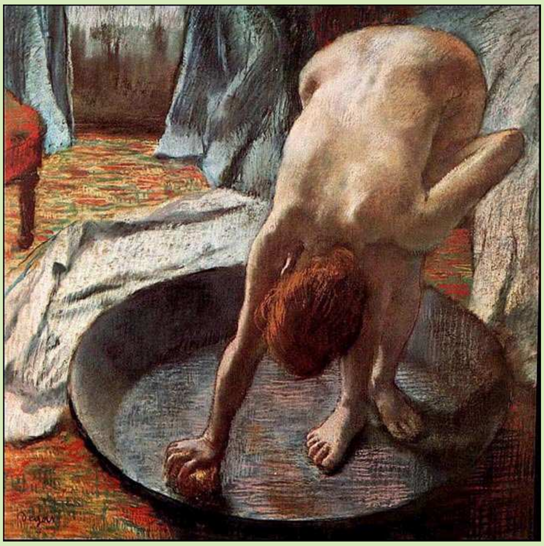
Chapitre 5

Variations de fonctions

Hors Sujet



Titre : « Autoportrait (1863) » et « Le Tub (1885) »

Auteur : Edgar Degas

Présentation succinte de l'auteur : Edgar Degas (1834-1917) est un peintre français, en général rattaché au mouvement impressionniste, formé à la fin du XIXe siècle, en réaction à la peinture académique de l'époque.

Sa carrière fut dès le départ influencée par les danseuses. En 1874, il commence à se faire connaître, les critiques louant ou dénigrant le réalisme de son travail. Il explore des thèmes comme les repasseuses ou les femmes à leur toilette, multipliant les points de vue audacieux, recherchant des effets lumineux et colorés. Il dit d'ailleurs à propos de ses nus : « Jusqu'à présent, le nu avait toujours été représenté dans des poses qui supposent un public. Mais mes femmes sont des gens simples... Je les montre sans coquetterie, à l'état de bêtes qui se nettoient. »

A partir des années 1880, Degas va aussi poser la question d'une sculpture « impressionniste », réalisant des modèles en cire peints au naturel, qu'il accessoirise ensuite. Seule *La Grande Danseuse* (cf première page) fut présenté de son vivant, les autres modèles l'aidant surtout dans ses peintures. Cette incarnation de la grâce et de l'innocence trahit en réalité la fascination de Degas pour la criminalité. En effet, avec son visage est sculpté sur le modèle des physionomies de criminels définies à l'époque, et la danseuse était un parfait « petit rat », transmettant la syphilis aux bourgeois venant la voir ...

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : C. Aupérin
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée : Jules Fil (Carcassonne)

Table des matières

« *Quand quelqu'un paye un tableau* 3 000 *francs, c'est qu'il lui plaît.*
Quand il le paye 300 000 *francs, c'est qu'il plaît aux autres.* »

EDGAR DEGAS

Leçon 3

Variations de fonctions

Introduction

On a déjà appris à résumer le signe d'une fonction dans un tableau (graphiquement ou par le calcul). Désormais, on souhaite résumer succinctement le comportement de la courbe représentative d'une fonction dans un tableau.

A faire ...

I) Sens de variations d'une fonction

<u>Travail de l'élève</u> **1.** Simone, une élève de seconde à profil scientifique, a trouvé la copie de son amoureux Norbert, un élève de première ES. Dedans, Norbert a dessiné le tableau suivant, qui décrit succinctement une fonction f à étudier, mais il n'a pas écrit de laquelle il s'agissait.

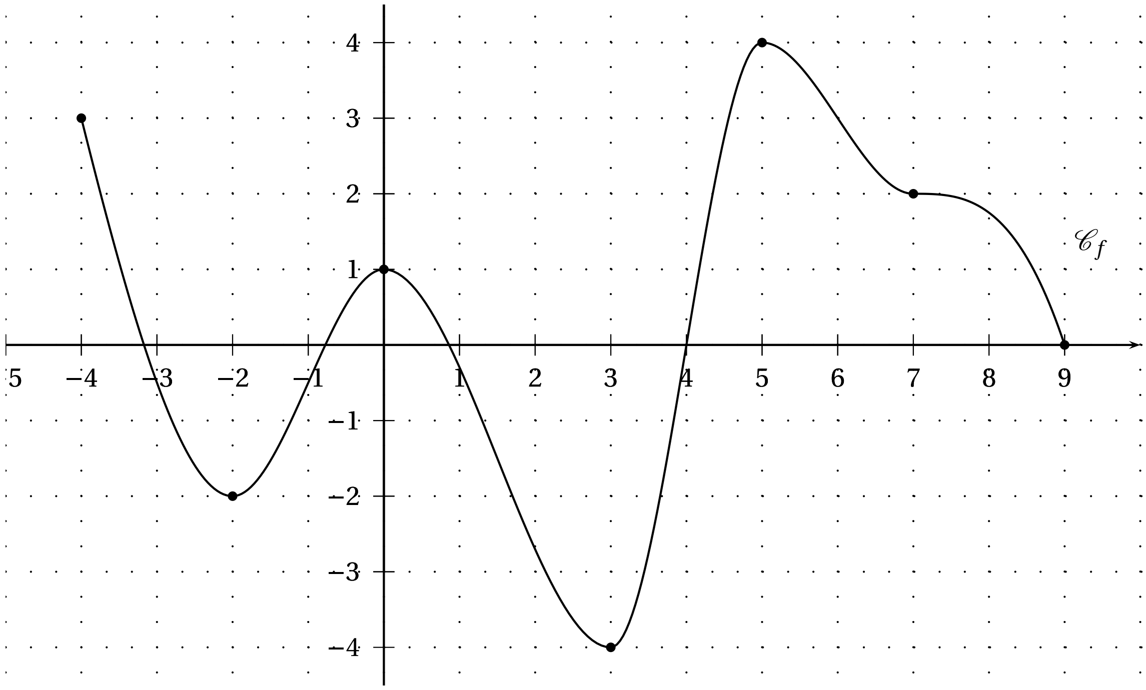
x	-6	-2	0	1	2	5
Variations de f	5	1	3	0	-4	2

1. Quel semble-t-être l'ensemble de définition de la fonction f ?
2. Que peuvent signifier les flèches, d'un point de vue graphique ?
3. Pouvez-vous donner l'image de 5 par f ? celle de 3 ? celle de 1 ? celle de -1 ?
   Si oui, précisez sa valeur.
4. Simone prétend qu'elle ne connait ni l'image de 3, ni l'image de 4, mais qu'elle possède tout de même des informations sur ces images à partir du tableau. Pouvez-vous préciser ces informations ?
5. Pouvez-vous donner des éventuels antécédents de 5 par f ? de 3 ? de 1 ? de -1 ?
   Si oui, précisez leur(s) valeur(s), sinon précisez leur nombre et les intervalles ou ils se situent.

6. Le tableau est-il à l'échelle ?
7. Simone veut dresser le tableau de signes de f. Expliquer pourquoi c'est impossible.
8. Sur sa copie, Norbert a écrit :

   – $f(0.5) = 1.5$
   – $f(3) < 0$
   – $f(-2) < f(-1)$
   – $f(-5) > f(-3)$
   – $f(-5) > f(-1)$
   – $f(0.5) < f(1.5)$
   – $f(1) < f(3)$
   – $f(-1) < f(1.5)$

   Simone n'est pas toujours d'accord. Qu'en pensez-vous ?
9. Conjecturer alors une signification des flèches en rapport avec l'ordre des images et des antécédents.
10. Dessiner une courbe compatible avec la courbe représentative de f.
11. Dans un autre exercice, Simone voit la courbe représentative de la fonction g suivante :



   Dresser le tableau de variations de la fonction g sur $[-4;9]$.

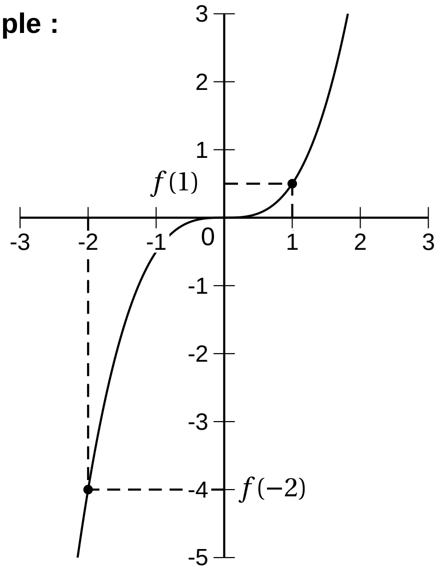
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

Définition 1 :
On dit que f est **strictement croissante** si pour tous réels a et b de I rangés dans un certain ordre, leurs images $f(a)$ et $f(b)$ sont rangées dans le même ordre.
On retiendra qu'**une fonction strictement croissante conserve l'ordre**. Autrement dit, si $a, b \in I$ alors :

$$a < b \Longrightarrow f(a) < f(b)$$

Remarques :
– De même $a > b \Longrightarrow f(a) > f(b)$ (ce qui compte c'est la *conservation* de l'ordre inital connu et non choisi en général)
– Si on a $a < b \Longrightarrow f(a) \leq f(b)$, alors on dit simplement que f est croissante.

Exemple :



Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0.5x^3$.

Sa représentation graphique nous montre que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
On sait que $-2 < 1$ et f strictement croissante sur $[-2;1]$ donc

$$f(-2) < f(1)$$

On peut donc affirmer que

$$0.5 \times (-2)^3 < 0.5 \times (1)^3$$

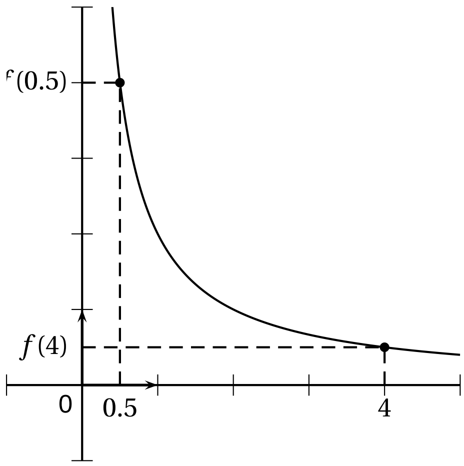
sans faire de calculs.

Définition 2 :
On dit que f est **strictement décroissante** si pour tous réels a et b de I rangés dans un certain ordre, leurs images $f(a)$ et $f(b)$ sont rangées dans l'ordre inverse.
On retiendra qu'**une fonction strictement décroissante inverse l'ordre**. Autrement dit, si $a, b \in I$ alors :

$$a < b \Longrightarrow f(a) > f(b)$$

Remarque : Si on a $a < b \Longrightarrow f(a) \geq f(b)$, alors on dit simplement que f est décroissante.

Exemple :



Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = \dfrac{1}{0.5x}$.

Sa représentation graphique nous montre que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.
On sait que $0.5 < 4$ et f strictement décroissante sur $[0.5;4]$ donc

$$f(0.5) > f(4)$$

On peut donc affirmer que

$$\frac{1}{0.5 \times 0.5} > \frac{1}{0.5 \times 4}$$

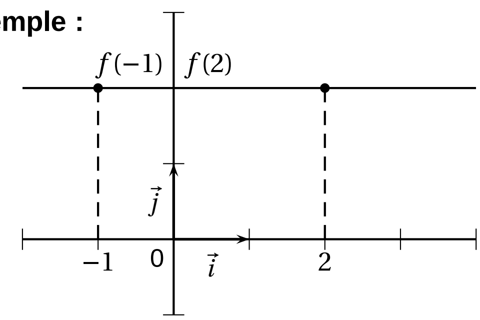
sans faire de calculs.

Remarques :
- On parle de fonction **monotone** sur un intervalle I si celle-ci y est soit croissante, soit décroissante.
- On ne parle de sens de variation que sur un intervalle, les bornes ouvertes ou fermées ne jouant aucun rôle.

Définition 3 :
On dit que f est **constante** si pour tous réels a et b de I, leurs images $f(a)$ et $f(b)$ sont égales.
Autrement dit, si $a, b \in I$ alors :

$$a < b \Longrightarrow f(a) = f(b)$$

Exemple :



Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2$.

On sait que f constante égale à 2 sur $\mathbb{R}$ donc

$$f(-1) = f(2) = f(-1000\pi) = 2$$

Remarque : La représentation graphique d'une fonction constante égale à k est une droite parallèle à l'axe des ordonnées d'équation $y = k$.

On résume les variations d'une fonction grâce à un tableau.

Quelques règles pour dresser un tableau de variations d'une fonction :

Sur la première ligne, on met dans l'ordre croissant toutes les valeurs remarquables des abscisses (les x) :
- les valeurs extrêmes de l'ensemble de définition
- les valeurs interdites
- les valeurs où la fonction change de sens de variation

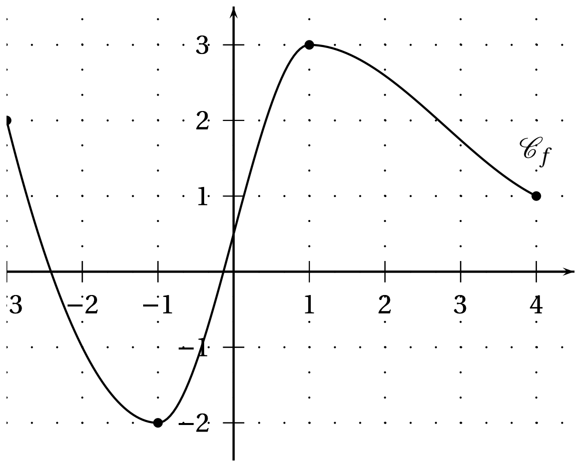
Sur deuxième ligne, à la verticale, on place
- Les ordonnées correspondantes quand on peut les calculer et une double-bare sous les valeurs interdites
- Entre chaque, une flèche montante ou descendante en fonction du sens de variation

Parfois, on rajoute des valeurs intermédiaires, pour rassembler toutes les informations dans un seul tableau.

Remarques :
- Si on sait qu'une fonction f est strictement monotone sur un intervalle I alors pour tous nombres a et b connus on peut connaître l'ordre de leurs images $f(a)$ et $f(b)$ sans les calculer (conservation ou changement de l'ordre).
- Si on connait l'ordre deux de nombres a et b d'un intervalle I et l'ordre de leurs images $f(a)$ et $f(b)$, on ne peut rien dire sur le sens de variation de f (on ne sait pas ce qui se passe pour les autres réels de I).

Exemple :

f est définie sur $[-3;4]$ par sa courbe représentative :



Le tableau de variations de f est :

x	-3		-1		1		4
Variations de f	2	↘	-2	↗	3	↘	1

Exercices du livre :
n°1 à 5 p 66 + 28 p 70 + 35 p 71 + QCM et Vrai-Faux p 72 + 42 à 44 p 73
19-21 p 85 (fonction carré)
40-42 p 86 (fonction inverse)

II) Extrema

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$.

Définition 4 :
Le **maximum** d'une fonction f sur un intervalle I est, s'il exsite, la plus grande valeur possible des images, atteinte pour un réel a de I.
Ainsi, pour tous réels $x \in I$ on a : $f(x) \leq f(a)$.

Exemples :
- Graphiquement ou grâce au tableau de variation : Dans l'exemple précédent, le maximum de f est 3 atteint quand $x = 1$.
  Sur $[-3;-1]$, le maximum de f est 2 atteint quand $x = -3$.
- Par le calcul : on cherche le maximum de la fonction t définie sur $\mathbb{R}$ par $t(x) = -x^2 + 3$.
  Pour tout x on a $-x^2 \leq 0 \Longleftrightarrow -x^2 + 3 \leq 3 \Longleftrightarrow t(x) \leq t(0)$.
  Donc le maximum de t est 3, atteint en $x = 0$

Définition 5 :
Le minimum d'une fonction f sur un intervalle I est s'il exsite, la plus petite valeur possible des images, atteinte pour un réel b de I.
Ainsi, pour tous réels $x \in I$ on a : $f(x) \geq f(b)$.

Exemples :
- Graphiquement ou grâce au tableau de variation : Dans l'exemple précédent, le minimum de f est -2 atteint quand $x = -1$.
  Sur $[1;4]$, le minimum de f est 1 atteint quand $x = 4$.
- Par le calcul : on cherche le minimum de la fonction v définie sur $\mathbb{R}$ par $v(x) = x^2 - \sqrt{3}$.
  Pour tout x on a $x^2 \geq 0 \Longleftrightarrow x^2 + \sqrt{3} \geq \sqrt{3} \Longleftrightarrow v(x) \geq v(0)$.
  Donc le minimum de v est $\sqrt{3}$, atteint en 0 (pour $x = 0$.

Remarque : On parle d'extremum lorsque la fonction admet soit minimum, soit maximum.

Exercices du livre :
$7-8$ p 20

Exercice 1 :

Corriger les incohérences des éléments suivants sur une fonction f (on cirrigera toujours le tableau de variations) puis dessiner une courbe représentative de f compatible avec vos informations.

x	-6		-2		0		1		2		5
Variations de f	5				3						2
		↘		↗		↘	-1	↘		↗	
			1						-4		

x	-6		1		3		5
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On sait de plus : $f(-1) = 2$ et $f(4) = 1$

Même question pour une fonction g :

x	-4		0.5		3
Signe de $g(x)$		$-$	0	$+$	

x	-4		-2		0		1		3
Variations de g			-2				3		
		↗		↘		↗		↘	
	-5				-1				2

On sait de plus : $g(-3) = -6$ et $g(2) = 4$

Exercice 2 :

Etablir un tableau de signes de la fonction f compatible avec son tableau de variations donné.

x	-6		-3		-2		-1.5		1		2.7		4
Variations de f	‖								3				1
	‖	↘	5	↘		↗	1	↗		↘		↗	
	‖				-2						-2		

Exercice 3 :

Soit z la fonction définie par $z(x) = \dfrac{3}{x-3}$.

1. Quel est son ensemble de définition ?
2. Après avoir tracer cette fonction sur votre calculatrice, décrire les variations de z (par des phrases).
3. Résumer cela dans un tableau de variations de z.
4. Rajouter une ligne au tableau pour décrire le signe de z.

Exercice 4 :

1. Dresser le tableau de variations de la fonction « carré » à partir de sa courbe représentative sur votre calculatrice
2. Trouver à l'aide du graphique les solutions des inéquations suivantes :

$$x^2 \leq 3 \qquad x^2 \geq 2 \qquad 1 \leq x^2 \leq 5$$

Exercice 5 :

1. Dresser le tableau de variations de la fonction « inverse » à partir de sa courbe représentative sur votre calculatrice
2. Trouver à l'aide du graphique les solutions des inéquations suivantes :

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x} \leq 1 \qquad -1 \leq \frac{1}{x} \leq -\frac{1}{4} \qquad -\frac{1}{4} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$$

Exercice 6 :

Soit la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4x - 1$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) = -(x-2)^2 + 3$
2. En déduire le maximum de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3. Tracer la courbe représentative de f sur $[-2;5]$
4. Compléter le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	0	$\cdots$	10	$+\infty$
Variations de f					

5. Grâce à ce tableau de variation, donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$
6. Grâce à la courbe résoudre graphiquement cette équation.
7. Par dichotomie, donner un encadrement à 10^{-2} de ces solutions.
8. Retrouver ces nombres par le calculs
9. Vérifier la cohérence des trois méthodes.

III) Fonctions affines

III-1 Sens de variation

***<u>Travail de l'élève</u>* 2.** Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = -3x + 5$.
On considère deux réels a et b tels que $a < b$.

1. Calculer $f(b) - f(a)$
2. Etudier le signe de l'expression trouvée.
3. En déduire l'ordre de $f(b)$ et $f(a)$, puis le sens de variation de f
4. En suivant la même méthode, établir le sens de variation de g.
5. Conjecturer le sens de variation d'une fonction affine (distinguer les cas).

Propriété 1 :
Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$.

1. Si $a < 0$, alors f inverse l'ordre $\mathbb{R}$, ie f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$
2. Si $a = 0$, alors f est constante sur $\mathbb{R}$
3. Si $a > 0$, alors f est conserve l'ordre sur $\mathbb{R}$, ie f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

<u>Preuve</u>
Soient x et y deux réels tels que $x < y$. On cherche à savoir si $f(x) = ax + b$ et $f(y) = ay + b$ sont dans le même ordre. Pour cela, on étudie le signe de $f(y) - f(x)$.

$$f(y) - f(x) = ay + b - (ax + b) = a(y - x)$$

Comme $x < y$, on sait que $(y - x) > 0$. Donc :

- Si $a > 0$ alors $a(y - x) > 0$ et on en déduit $f(y) - f(x) > 0 \iff f(x) < f(y)$ pour tous réels $x < y$.
  Les images et les antécédents par f sont rangés dans le même ordre, donc f conserve l'ordre sur $\mathbb{R}$. C'est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $a < 0$ alors $a(y - x) < 0$ et on en déduit $f(y) - f(x) < 0 \iff f(y) < f(x)$ pour tous réels $x < y$.
  Les images et les antécédents par f sont rangés dans l'ordre inverse, donc f inverse l'ordre sur $\mathbb{R}$. C'est une fonction décroissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $a = 0$ alors $a(y - x) = 0$ et on en déduit $f(y) = f(x)$ pour tous réels x, y.
  Les images et les antécédents par f sont tous égaux, donc f est une fonction constante sur $\mathbb{R}$.

On peut dresser le tableau de variations d'une fonction affine en fonction du signe de a.

$a < 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
Variations de $ax + b$	$\searrow$	

$a > 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
Variations de $ax + b$	$\nearrow$	

Remarque : Les fonctions affines non constantes ne possèdent pas d'extrema.

Exemple :

On donne les fonctions f et g définies par $f(x) = -3x - \frac{5}{8}$, $g(x) = 87968x - \sqrt{5468}$.

1. Donner, sans calculatrice, l'ordre des images des nombres :

   a. 1 et 5 **b.** $\sqrt{10}$ et $-\pi$ **c.** $2\sqrt{5}$ et $\sqrt{15}$

2. Donner, sans calculatrice, l'ordre des antécédents des nombres :

   a. $-\frac{45}{987}$ et $-\frac{45}{65498}$ **b.** $\sqrt{180}$ et $2\sqrt{98}$ **c.** $\frac{3^4 \times 5^{13}}{15^7}$ et $\frac{5^3 \times 3^{10}}{15^{10}}$

Exercice 7 **:**

f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(1) = 3$ et $f(-2) = -1$

1. Peut-on en déduire que f est croissante sur $[-2; 1]$?
2. On sait de plus que f est une fonction affine. Peut-on alors connaitre son sens de variation sur $\mathbb{R}$?
3. Retrouver l'expression de f.

Mêmes questions pour une fonction g affine telle que $g(-2) = 9$ et $g(3) = -11$.

Exercices du livre :

14 p 67

III-2 Représentation graphique

Travail de l'élève **3.** Sur Géogébra, construire la droite passant par les points $A(0; 2)$ et $B(1; -3)$.
Afficher l'équation de la droite.
Laisser A fixe quelques temps et déplacer B.
Conjecturer les lectures graphiques de l'ordonnée à l'origine et du coefficient directeur.
Afficher la pente si nécessaire.

Dans cette partie, f désigne une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$. On appelle d sa représentation graphique.

Propriété 2 : ***Définition***

La représentation graphique d'une fonction affine est une droite.
La droite d représentant la fonction affine f a pour équation réduite est $y = ax + b$.
a est appelé le **coefficient directeur** et b l'**ordonnée à l'origine**.

Remarque : Dire que d a pour équation $y = ax + b$ signifie qu'un point $A(x_A; y_A)$ appartient à d si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation de d, ie si et seulement si $y_A = ax_A + b$.

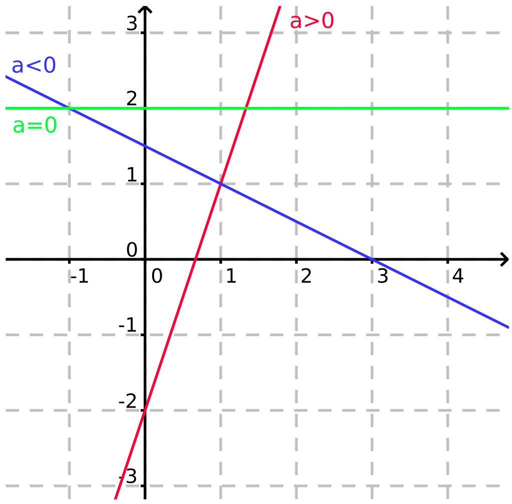
Exemple :

Soit $Fabrice$ la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $Fabrice(x) = 2x - 1$ et d sa représentation graphique.
Donner la nature de d, son équation, son coefficient directeur et son ordonnée à l'origine.
Dire si les points $A(-3; 6.9)$ et $B(200; 399)$ appartiennent à d.
Donner les coordonnées de trois autres points de d.

Grâce au tableaux de variations établis dans la partie précédente, on sait que l'on a trois types d'orientation possibles pour la droite d, en fonction du signe du coefficient directeur a.

Attention : Une droite verticale ne peut pas représenter une fonction affine !

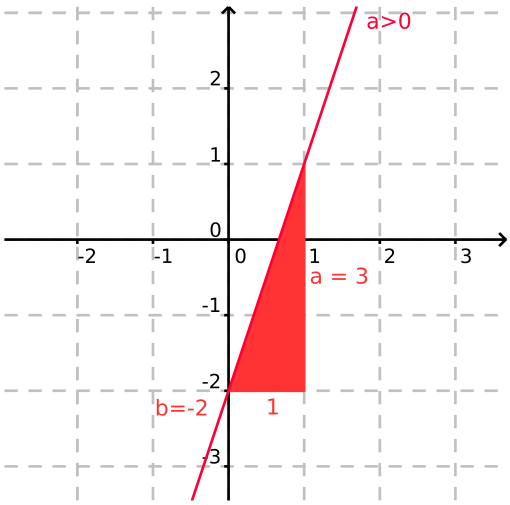
Si $b = 0$, alors d passe par l'origine du repère. Elle représente une fonction affine particulière : une fonction linéaire. Il s'agit d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par une expression du type $f(x) = ax$.

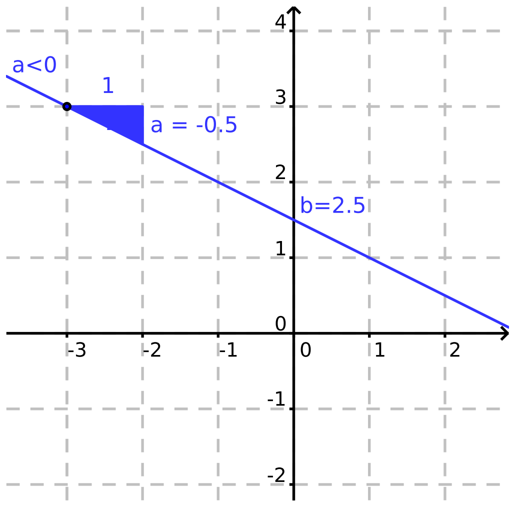


Interprétation graphique du coefficient directeur et de l'ordonnée à l'origine :

On choisit au hasard deux points sur la droite d séparés d'une unité en abscisse.

Le **coefficient directeur** représente le nombre d'unités verticales les séparant (en allant de gauche à droite). L'**ordonnée à l'origine** est l'ordonnée du point d'intersection de d avec l'axe des ordonnées, ie du point de d d'abscisse 0.





Méthode pour tracer la représentation graphique de la fonction affine f

On a deux méthodes :

- Choisir deux nombres x_1 et x_2, calculer leurs images $f(x_1)$ et $f(x_2)$, placer les points de coordonnées $(x_1; f(x_1))$ et $(x_2; f(x_2))$ dans un repère, puis les relier à la règle.
- Placer le point sur l'axe des ordonnées d'ordonnée b, puis placer une deuxième point de la droite en utilisant l'interprétation graphique du coefficient directeur a.

Exercice 8 :

1. Dans un repère, tracer la droite passant par $A(2;-1)$ et $B(3;5)$.
   Trouver le coefficient directeur puis l'ordonnée à l'origine de la droite (AB). En déduire l'expression de la fonction affine représentée par cette droite.
2. Même question pour les points $C(-1,2)$ et $D(3;-1)$.
3. Trouver par le calcul les coordonnées du point d'intersection des droites (AB) et (CD). *Vérifier graphiquement.*

Exercice 9 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x + 1$.

1. Trouver les images de 0 et de -2 par la fonction f.
2. Calculer $f\left(\frac{4}{3}\right)$.
3. Trouver les éventuels antécédents de 0 et -2 par la fonction f.
4. Résoudre $f(x) = \frac{4}{3}$.
5. Tracer la représentation graphique de f dans un repère orthonormé et contrôler graphiquement les résultats précédents.

Exercices du livre :

5-6-7 p 60

Exercices du livre :

Défis : 55 à 57 p 76

Exercices du livre :

33 p 71 + 26 p 69 + 20 p 68 (Algorithme de tracé à faire en module)