Chapitre 4

Probabilités

Hors Sujet

Titre : « Death Note »

Auteur : Oba et Obata

Présentation succinte de l'auteur : *Death Note* est un manga de type shônen, créé par le scénariste Tsugumi Oba et le dessinateur Takeshi Obata. Il a été prépublié dans un journal de 2003 à 2006, et par la suite publiée en douze tankôbon de 2004 à 2006.

L'histoire est centrée sur *Raito Yagami*, un lycéen surdoué qui juge le monde actuel criminel et corrompu. Sa vie change du tout au tout le jour où il ramasse par hasard un mystérieux cahier intitulé « Death Note ». Ancienne propriété d'un dieu de la mort, le Death Note permet à son utilisateur de tuer toute personne dont il connaît le nom et le visage. Raito décide d'utiliser le Death Note pour exterminer les criminels, dans le but d'éradiquer le Mal et de bâtir un monde parfait dont il sera le dieu.

Mais les nombreuses morts inexpliquées de criminels à travers le monde attirent l'attention d'Interpol et du mystérieux *L*, un détective capable de résoudre n'importe quelle énigme, mais dont personne ne connaît ni le visage ni le nom. L décide d'enquêter pour capturer le tueur en série, surnommé par le grand public « Kira ». Entre Raito et L, tous deux persuadés d'agir pour la justice, s'engage un combat acharné pour découvrir en premier l'identité de l'autre...

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : C. Aupérin
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée : Jules Fil (Carcassonne)

Table des matières

« *Si les gens ne croient pas que les mathématiques sont simples, c'est seulement parce qu'ils ne réalisent pas combien la vie est compliquée !* »

JOHN LOUIS VON NEUMANN

LEÇON 4

Probabilités

Au fil du temps

Alors que les hommes se sont intéressés à la géométrie depuis la nuit des temps, et qu'une première présentation rigoureuse (les mathématiciens disent axiomatique) en a été proposée trois siècles avant JC par le grec Euclide, il a fallu attendre le XVI^e siècle pour qu'on s'intéresse enfin aux probabilités, et encore était-ce pour aider les princes à améliorer leurs gains au jeu.
Ainsi, le Grand Duc de Toscane demanda au vénérable Galilée pourquoi il était plus difficile d'obtenir 9 que 10 au jeu de passe-dix (jeu consistant à jeter 3 dés), même s'il n'y a dans les deux cas que 6 combinaisons pour les obtenir. La grande expérience du Duc en matière de jeu lui avait permis de remarquer ce phénomène, alors que théoriquement, « sur le papier » , il aurait dû y avoir la même fréquence d'apparition des deux nombres, puisqu'il y a dans chaque cas 6 manières de les obtenir.
Y aurait-il plusieurs réalités ?
Parmi toutes les définitions possibles du hasard, nous en retiendrons deux qui ont influencé la théorie des probabilités :

– pour certains, tout a une cause, et le hasard n'est le reflet que de l'ignorance que nous avons des lois de la Nature. Cet esprit souffla particulièrement au XVIII^e siècle au moment où Laplace posa les bases d'une première théorisation des probabilités. Les probabilités sont alors déterminées a priori, par des considérations non expérimentales. Par exemple, un dé a six faces, donc, on peut poser d'avance que l'événement « obtenir 5 » a une probabilité de 1/6. Cette symétrie, cette « géométrie du hasard » selon les termes de Pascal, permet de calculer sans ressentir le besoin de recourrir à l'expérience. Elle implique la notion centrale d'équiprobabilité : une probabilité est égale au rapport du nombre de cas favorables sur le nombre de cas possibles.
  Cette conception peut apparaître assez naïve : il est illusoire de penser qu'un dé puisse être parfaitement équilibré, mais doit-on être gêné pour autant ?
– pour d'autres, le hasard constitue notre univers, i.e qu'il n'est pas qu'une abstraction mathématiques mais une réalité physique. La théorie du chaos mise en forme par René Thom en 1955 montre en effet que dans certaines situations, on aura beau observer un phénomène pendant un temps très long, on ne pourra prévoir son évolution. De même en physique quantique, la connaissance du passé et du présent ne permettent pas de prévoir mieux des états possibles futurs.

Alors, le hasard, une réalité physique ou une invention mathématiques ? Au lieu de s'opposer, ces deux visions se complètent et il faut les avoir en tête. Ces deux notions ont en commun de postuler que l'issue de l'expérience (le jeter d'un dé) est indépendant de l'observateur. Ceci peut ne plus être vrai dans certains domaines, comme par exemple l'économie.

I) Vocabulaire

I-1 La notion de hasard

Le but de cette partie est d'apprendre à construire des modèles pour décrire les expériences aléatoires. De telles expériences sont par exemple : la face obtenue en lançant une pièce de monnaie, le tirage du loto, etc...
Le besoin d'avoir une méthode systématique de description de telles expériences est justifié par le fait que certains résultats, qui nous sont parfois intuitivement évidents, et que nous n'arrivons pas toujours à expliquer sont en fait faux, comme en témoignent le problème du Duc de Toscane, ou encore les deux problèmes suivants :

Problème :

A votre avis, quelle est la probabilité que sur l'ensemble des élèves de seconde du lycée, deux personnes aient leur anniversaire le même jour de l'année ? Dans un groupe de 60 personnes ? Dans un groupe de 30 personnes ?

A votre avis, combien doit-on réunir de personnes pour avoir au moins une chance sur deux que deux personnes de ce groupe aient leur anniversaire le même jour de l'année ?

Objectifs :

- Etablir une discussion au sein de la classe et éveiller la curiosité
- Tester l'intuition des élèves sur la première question et voir leur niveau initial (comme il y a plus de 365 élèves en seconde,la probabilité est évidente)
- Leur faire remarquer que la probabilité est un nombre théorique entre 0 et 1, indépendant du résultat d'une expérience (en effet, la plupart répondront aux questions en fonction de leur expérience)
- Montrer aux élèves l'utilité de l'étude des probabilités grâce aux deuxième et troisième questions, non intuituves (en général, on pose des problèmes très simples aux élèves, dans lesquels la théorie ne s'avère pas nécessaire pour répondre).
  Les réponses à ces questions sont respectivement $\simeq 99\%$, $\simeq 70\%$.
- La quatrième question est simplement là pour compléter le problème.
  La réponse est 23 personnes.
- L'objectif n'est absolumment pas d'étudier ce problème, trop complexe en ce début de chapitre.

Problème :

Un jeu télévisé se déroule de la manière suivante : il y a trois portes, derrière l'une d'entre elles se trouve 10000€ et rien derrière les deux autres. Un candidat choisit au hasard l'une des trois. Ensuite le présentateur élimine une des deux mauvaises portes, tout en conservant celle choisie par le candidat. Le candidat peut alors conserver son choix ou le changer.

Que vaut-il mieux faire pour le candidat, changer ou conserver son choix ? Quelles sont ses chances de gagner dans le premier cas, et dans le deuxième ?

Objectifs :

- Ce problème est parfois déjà connu des élèves, même s'ils ne savent pas expliquer la réponse.
- Il fait référence aux probabilités conditionnelles, et teste là encore leur intuition.
- Etant plus simple que le précédent, les élèves peuvent commencer à mettre en place une stratégie de réponse, voire une modélisation ou une simulation.
- On peut amorcer un début de réponse, non formalisée. Pour cela, il semble jusdiscieux de proposer le même problème avec 100 portes.
  Le n° 62 p 260 du livre évoque ce même problème.
- Il est conseillé de simuler, au cours du chapitre, l'expérience sur Algobox ou sur tableur.

I-2 Expérience aléatoire, événements

Définition 1 :

Une **expérience aléatoire** est un processus dont le résultat est incertain (mais dont on peut prévoir le type).

Exemple :

Le lancé de dé ou le lancé d'une pièce de monnaie sont des expériences dont l'issue est incertaine.

Définition 2 :

- Un des résultats possibles d'une expérience aléatoire est appelé **éventualité** ou **issue**
- L'ensemble de toutes les issues d'une expérience aléatoire est appelé **univers**. On le note souvent Ω.
- Un sous-ensemble de l'univers est appelé **événement**.
  C'est un ensemble constitué d'issues de l'univers et chaque partie de l'univers est un événement.

Remarque : En classe de seconde l'ensemble Ω sera toujours un ensemble fini.
On ne considérera donc pas des expériences du type

- « Choisir un nombre réel au hasard entre 0 et 1. », où l'univers est $\Omega = [0;1]$
- « On lance une pièce et on compte le nombre de lancés jusqu'au premier pile obtenu », où $\Omega = \mathbb{N}$.

Exemples :

- On lance un dé à 6 faces et on regarde la face obtenue : $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$
- On lance un dé à 6 faces on regarde si le numéro de la face obtenue est pair ou impair : $\Omega = \{P, I\}$
- On lance une pièce de monnaie et on s'intéresse à la face obtenue : $\Omega = \{P, F\}$
- Même expérience que précédemment en lançant deux pièces de monnaie : $\Omega = \{PP;PF;FP;FF\}$
  Soient A et B les événements de cette expérience A =« Obtenir **au moins** une fois pile » et B =« Obtenir **au plus** une fois Pile ».
  Alors $A = \{PP;PF;FP\}$ et $B = \{PF;FP;FF\}$.

Remarques :

- L'univers représente l'ensemble toutes les issues envisagées de l'expérience. Il est donc fonction de l'idée de modélisation a priori que l'on se fait de l'expérience. Si lors du lancé d'une pièce de monnaie on considère usuellement qu'il y a deux issues "PILE" et "FACE", rien n'empêche d'en rajouter une troisième, par exemple "TRANCHE". C'est à chacun (ou à chaque énoncé) de le définir. À défaut, on considère tacitement, qu'il s'agit de l'univers usuellement utilisé dans telle ou telle situation.
- Une même expérience peut déboucher sur deux univers différents suivant les observations faites.
  Par exemple on lance deux dés et suivant si l'on fait le produit P ou la somme S des deux chiffres obtenues, on obtient :

$$\Omega_p = \{1;2;3;4;5;6;8;9;10;12;14;15;16;18;20;24;25;30;36\}$$

$$\Omega_s = \{2;3;4;5;6;7.8;9;10;11;12\}$$

II) Déterminer des univers, des événements

II-1 Opérations sur les ensembles

Travail de l'élève **1.** On dispose de deux urnes 1 et 2 contenant 12 boules chacune.
L'urne 1 contient 6 boules rouges et 6 boules jaunes.
L'urne 2 contient 6 boules rouges, 4 boules bleues et 2 boules jaunes.
Un jeu consiste à choisir une première boule dans l'urne 1, puis une seconde boule dans l'urne 2.
On note les différents résultats de ce jeu par un couple de couleurs.
Par exemple, le résultat $(j;r)$ signifie que la première boule tirée est jaune, et que la seconde est rouge.

1. Ecrire une phrase décrivant l'issue $(r;b)$.
2. Déterminer l'univers de cette expérience.

Définition 3 :

Le nombre d'éléments d'un ensemble fini A est appelé **cardinal** de A.
Ce nombre est noté Card A. On convient que Card $(\emptyset) = 0$.

La notion de cardinal ne s'étend pas aux ensembles infinis, tels que $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ *ou* $\mathbb{R}$.

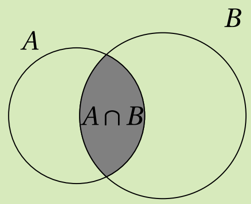
3. Donner le cardinal de l'univers.

4. Ecrire sous forme d'ensembles, ie en faisant la liste des issues qui les composent (donc entre accolades), les événements suivants (dont on précisera les cardinaux) :

- A= « obtenir une boule jaune au 1^{er} tirage »
- B= « obtenir une boule bleue exactement »
- C= « obtenir au plus une boule rouge »
- D= « obtenir au moins une boule jaune »
- E= « obtenir deux boules rouges »

Définition 4 :

L'ensemble des éléments communs aux événements A et B se note $A \cap B$ (se lit « A inter B »).
Il s'agit de l'**intersection** de A et de B.



Lorsque $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont deux ensembles **disjoints** ou **incompatibles**.

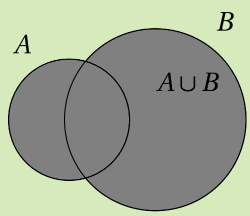
5. **a.** Décrire par une phrase l'événement A ∩ B.

b. Déterminer l'ensemble des issues composant A ∩ B.

c. Donner deux événements incompatibles parmi les précédents.

Définition 5 :

L'ensemble des éléments appartenant à l'un au moins des deux événements A ou B se note « A ∪ B » (se lit « A union B »).
Il s'agit de la **réunion** de A et de B.

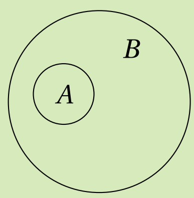


6. **a.** Décrire par une phrase l'événement A ∪ B.

b. Déterminer l'ensemble des issues composant A ∪ B.

Définition 6 :

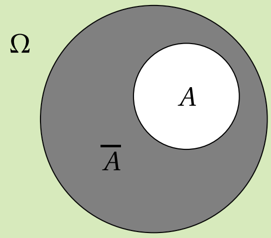
Lorsque tous les éléments d'un ensemble A sont dans un ensemble B, on dit que A est **inclus** B.
On note : $A \subset B$.
On dit aussi que A est une « **partie** » de B ou que A est un « **sous-ensemble** » de B.



7. Donner deux événements parmi les précédents dont l'un est inclus dans l'autre.

Définition 7 :

Soit Ω un ensemble et A une partie de Ω.
L'ensemble des issues de l'univers n'appartenant pas à A est l'**événement contraire** de A (encore appelé **complémentaire** de A).
Il se note généralement « $\overline{A}$ » (se lit « A barre ») ou encore :



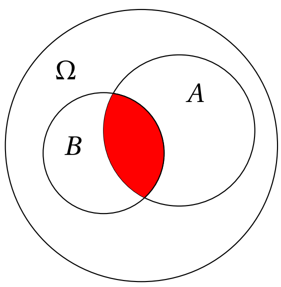
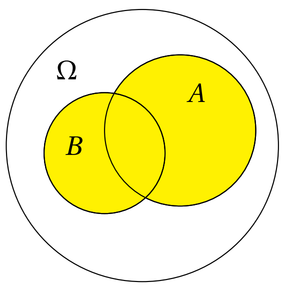
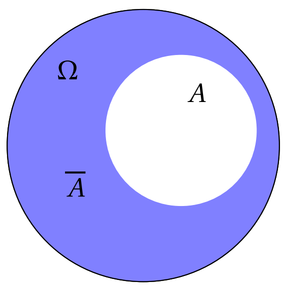
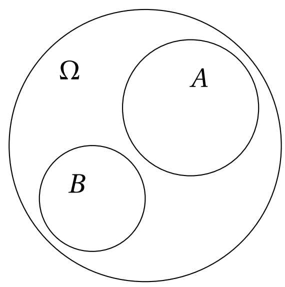
$$\Omega - A \qquad \text{ou} \qquad \Omega \setminus A \qquad \text{ou} \qquad {}^{C}A$$

8. **a.** Décrire par une phrase l'événement $\overline{A}$.
b. Déterminer l'ensemble des issues composant $\overline{A}$.
c. Déterminer les événements $A \cup \overline{A}$ et $A \cap \overline{A}$

Rappelons qu'un ensemble s'apparente à une liste (finie ou non) d'objets distincts possédant un certains nombre de propriétés communes, comme l'ensemble des nombres entiers naturels, ou encore les multiples de 3 inférieurs à 100, ... On les note avec des accolades.
Il n'y aura pas de notion d'ordre. Ainsi $\{1,2\}$ et $\{2,1\}$ désignent le même ensemble.
On utilise les symboles $\in$ et $\notin$ pour signifier qu'un élément appartient ou non à un ensemble.
Enfin on note $\emptyset$ l'ensemble qui n'a pas d'éléments (ensemble vide).

Exemple :

$$E = \{0;2;4;6;8\} = \{2;8;4;6;0\} \qquad 2 \in E \qquad \text{et } 3 \notin E$$

$A \cap B$	$A \cup B$	$\overline{A}$	$A \cap B = \emptyset$
Intersection de A et B : Eléments communs de A et B	**Réunion de A et B :** Eléments de A ou B (voire les deux)	**Complémentaire de A :** Eléments de Ω non dans A	**A et B sont disjoints** : Aucun élément commun à A et B
			

Remarques :
- Pour déterminer l'univers d'une expérience aléatoire, on liste les issues possibles de l'expérience.
- Pour déterminer les issues qui réalisent un événement, on liste les issues qui respectent la condition définissant cet événement.
- Pour déterminer l'intersection de deux événements, on fait la liste des issues communes aux événements.
- Pour déterminer la réunion de deux événements A et B, on fait la liste des issues réalisant soit A, soit B (soit les deux).

Exemple :

Dans un groupe de 500 élèves, 350 pratiquent un sport et 200 font de la musique ; 100 élèvent pratiquent les deux activités. On note A l'événement « l'élève fait un sport » et B l'événement « l'élève fait de la musique ».

1. Représenter la situation par un diagramme.
2. Décrire par une phrase puis déterminer le cardinal de chacun des événements suivants :

$$A \qquad B \qquad A\cap B \qquad A\cup B \qquad \overline{A} \qquad \overline{B} \qquad \overline{A\cap B} \qquad \overline{A\cup B}$$

Exemple :

On jette un dé dont les faces sont numérotés de 1 à 6 et on s'intéresse au numéro sur la face supérieure.

1. Définir l'univers Ω
2. Décrire les événements suivants :
   A : « obtenir un numéro inférieur ou égal à 2 »
   B : « obtenir un numéro impair »
   C : « obtenir un numéro strictement supérieur à 4 »
3. Décrire les événements suivants : $A\cap B$; $A\cup B$; $A\cap C$; $A\cup C$; $C\cap B$; $C\cup B$; $\overline{A}$; $\overline{A}\cup C$; $\overline{A}\cap C$
4. Parmi les événements précédents, citer deux événements incompatibles qui ne sont pas contraires l'un de l'autre.

Exercice 1 **:**

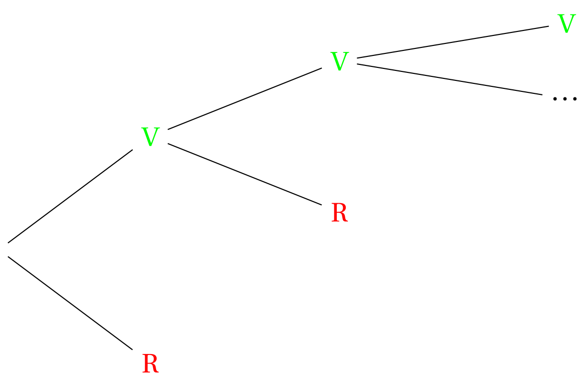
Une urne contient deux jetons rouges marquées R_1 et R_2 et deux jetons jaunes marquées J_2 et J_3.
On tire au hasard un premier jeton dans l'urne, on le remet et on tire au hasard un deuxième jeton.
On note à chaque tirage la couleur et le numéro obtenu.

1. Quel est l'univers de cet expérience ? *On pourra s'aider d'un tableau à double-entrée*
2. Ecrire sous forme d'ensemble les événements suivants :
   – A :« Obtenir deux jetons de même couleur ou de même numéro »
   – B : « Obtenir deux jetons portant des numéros ayant un écart de 1 »
3. Déterminer sous forme d'ensemble les évènements $A\cap B$, $A\cup B$ et $\overline{A}$

II-2 Les arbres

Travail de l'élève **2.** Une urne contient 7 boules : 2 rouges (R) et 5 vertes (V).
On tire successivement et sans remise trois boules de l'urne.

1. Compléter l'arbre suivant, qui modélise l'expérience :



« Obtenir VVV »

« Obtenir .... »

2. Quel est le cardinal de l'univers ?
3. Déterminer sous forme d'ensemble les événements suivants :
   - A = « Tirer trois boules vertes »
   - B = « Tirer trois boules rouges »
   - C = « Tirer deux boules rouges »
   - D = « Tirer une boule rouge au deuxième tirage sachant que l'on en a tiré une au premier tirage »
   - E = « Tirer une boule rouge au deuxième tirage sachant que l'on a tiré une verte au premier »
   - F = « Tirer une boule rouge au premier tirage »
   - G = « Tirer une boule rouge au troisième tirage »
   - H = « Tirer deux boules de la même couleur »
4. Déterminer en français de manière claire, puis sous forme d'ensemble les événements suivants :

$$E \cap G \qquad E \cap F \qquad D \cup E \qquad \overline{A} \qquad \overline{C}$$

Méthodes

On considère une expérience aléatoire à plusieurs étapes (ou observations).

Pour déterminer son univers, on peut construire un arbre.

Pour cela, à chaque nouvelle étape, on dessine à partir de chaque issue de l'étape précédente (appelée **noeud**), toutes les **branches** représentants les issues possibles.

- Les issues de l'expérience sont alors les **chemins** de l'arbre partant du début et allant jusqu'à la fin.
- Pour déterminer le cardinal de l'univers, il suffit donc de compter les branches de la dernière étape.
- Pour déterminer les issues qui réalisent un événement, on liste alors tous les chemins de l'arbre qui respectent la condition définissant cet événement.

Exemples :

1. On lance un dé. Si le résultat est pair on tire un jeton d'une urne contenant 3 jetons (numérotés 1, 2 et 3), sinon on s'arrête.
   - Décrire à l'aide d'un arbre l'ensemble des issues possibles.
   - Quel est le cardinal de l'univers ?
2. Mêmes questions, mais on s'intéresse cette fois à la somme obtenue.
3. Une urne contient 2 boules rouges et 3 boules blanches. On tire des boules de l'urne (sans remise) jusqu'à obtention d'une boule rouge.
   - Décrire à l'aide d'un arbre l'ensemble des issues possibles.
   - Quel est le cardinal de l'univers ?

III) Probabilités (discrètes)

III-1 Loi de probabilité

Travail de l'élève **3.** Activités 1 à 5 p 240 de l'hyperbole pour une séance révision.

Définition 8 :
On considère une expérience aléatoire d'univers fini $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \ldots; \omega_n\}$ (Card $\Omega = n$).
Définir une **loi de probabilité** P sur Ω c'est associer à chaque éventualité ω_i un nombre $p_i \in [0;1]$ de sorte que

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$$

De plus, la probabilité d'un événement A, notée $P(A)$, doit être la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.

Remarque : Les nombres p_i sont les probabilités des événements élémentaires ω_i. On a $p_i = p(\omega_i)$.

Exemple :
On lance deux fois une pièce équilibrée. L'univers est $\Omega = \{PP; PF; FP; FF\}$ et chaque éventualité a la même probabilité $\frac{1}{4}$.
La probabilité de l'événement A = « obtenir Pile et Face » = $\{PF; FP\}$ est donc $P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Remarques :
- On a $P(\Omega) = 1$.
- Par convention, on pose $P(\emptyset) = 0$.
- Pour tout événement A, on a $0 \leq P(A) \leq 1$.
- Il ne faut pas confondre un événement A qui est un ensemble d'issues de l'expérience et sa probabilité $P(A)$ qui est un nombre de l'intervalle $[0;1]$.

Définition 9 :
Modéliser une expérience aléatoire, c'est choisir une loi de probabilité sur l'univers Ω qui représente au mieux les chances de réalisation de chaque issue.

Remarque : On présente souvent une loi de probabilité sous forme de tableau.
La première ligne contient les issues possibles, la seconde leur probabilité.

Exemple :
Dans un verger, on trouve deux fois plus de pommiers donnant des pommes rouges et que de pommiers donnant des pommes vertes (et c'est tout).
On cherche la probabilité de choisir un pommier donnant des pommes rouges.
Appelons $P(R)$ cette probabilité et $P(V)$ celle de choisir un pommier donnant des pommes vertes.
Alors on sait que $P(R) = 2P(V)$. De plus $P(R) + P(V) = 1$.
On a donc $2P(V) + P(V) = 1 \Longleftrightarrow 3P(V) = 1 \Longleftrightarrow P(V) = \frac{1}{3}$ et $P(R) = \frac{2}{3}$.

<u>Exercice 2</u> **:**
Soit un dé truqué dont les probabilités des faces d'apparitions sont donnés par le tableau suivant :

Eventualité	1	2	3	4	5	6
Probabilité	$0,05$	$0,05$	$0,1$	$0,1$	$0,2$	a

1. Calculer la probabilité de l'éventualité : « le dé tombe sur 6 ».
2. Calculer la probabilité de l'événement A =« obtenir un résultat inférieur ou égal à 4 ».
3. Calculer la probabilité de l'événement B =« obtenir un nombre premier ».
4. Calculer la probabilité de l'événement C = « obtenir un nombre pair ».

Exercices du livre : Hyperbole

n°$3-4-5-10$ p 249

III-2 L'équiprobabilité

Définition 10 :

Lorsque toutes les issues d'une expérience aléatoire ont même probabilité, on dit qu'il y a **équiprobabilité** ou que la loi de probabilité est **équirépartie**.

Propriété 1 :

Lorsque la loi de probabilité est équirépartie, la probabilité d'un événement A est :

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'éventualités favorables}}{\text{nombre d'éventualités possibles}} = \frac{\text{Card}\,A}{\text{Card}\,\Omega}$$

Exemple :

Dans un jeu de 32 cartes, la probabilité de tirer le valet de coeur est $\frac{1}{32}$.

Celle de tirer un valet est $\frac{4}{32} = \frac{1}{8}$. Celle de tirer un coeur est $\frac{8}{32} = \frac{1}{4}$.

Exercices du livre : Hyperbole

n°$13-14-16-19-20$ p 249 + 47 p 256 (Vrai-Faux)

III-3 Quelques propriétés

Propriété 2 :

Si deux événements sont incompatibles, alors la probabilité de leur réunion est égale à la somme de leurs probabilités :

$$\text{Si } A \cap B = \emptyset \text{ alors } P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Preuve

Si l'un des événements A et B est l'ensemble vide, alors la relation précédente est évidente.

Dans le cas contraire, $P(A)$ est la somme des probabilités des issues de A et $P(B)$ est la somme des probabilités des issues de B. Puisque A et B sont disjoints, $A \cup B$ contient exactement tous les éléments de A et tous ceux de B. Par conséquent $P(A) + P(B)$ est égal à la somme des probabilités des élements de $A \cup B$, i.e $P(A \cup B)$

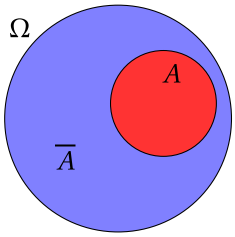
Corollaire 1 :

- La probabilité de l'événement contraire $\overline{A}$ de A est $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
- Si $A \subset B$, alors $P(A) \leq P(B)$

Preuve

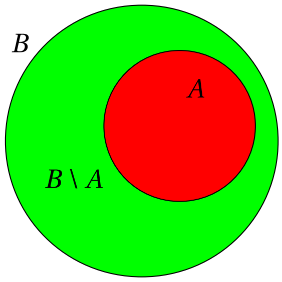
– Par définition, on a $\overline{A} \cup A = \Omega$ et $\overline{A} \cap A = \emptyset$ (ie A et $\overline{A}$ disjoints).
Par conséquent d'après la propriété précédente :

$$1 = P(\Omega) = P(\overline{A} \cup A) = P(\overline{A}) + P(A) \Longleftrightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$



– Si $A \subset B$, alors $B = A \cup (B \setminus A)$,
(où $B \setminus A$ est l'ensemble des éventualités de B qui ne sont pas dans A.)
Comme $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$ (ie A et $B \setminus A$ disjoints), d'après la propriété précédente on a :

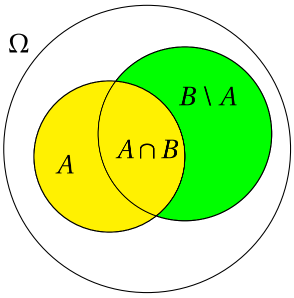
$$P(B) = P(A) + \underbrace{P(B \setminus A)}_{\geq 0} \Longrightarrow P(A) \leq P(B)$$



Théorème 1 :
La propabilité de la réunion de deux événements A et B est :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Preuve



Il suffit d'écrire que : $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$.
Comme $A \cup (B \setminus A) = \emptyset$, il vient :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A)$$

Or $P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B)$. Donc

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Exemple :
Dans un club, plusieurs activités sont proposés dont le tir à l'arc et le golf. Parmi les 50 adhérents, 30 pratiquent le tir à l'arc, 18 le golf et 6 les deux sports. Quelle est la probabilité pour qu'un adhérent choisi au hasard :

1. pratique le tir à l'arc ? le golf ?
2. pratique l'un au moins des deux sports ?
3. ne pratique ni le tir à l'arc, ni le golf ?

Exercices du livre : Hyperbole
n°22 – 23 p 250 (applications)
n° 38 + 40 p 252 (tableaux) n° 42 à 44 p 255 + 48 p 256 (logique)
DM : 25 + 32 p 250

III-4 Les arbres de probabilité

Travail de l'élève **4.** Hyperbole n° 41 p 254.
Question : que cela changerait-il si le tirage se faisait avec remise ?

Règles de calculs

1. La somme des probabilités des branches partant d'un même nœud est égale à 1.
2. La probabilité d'un chemin est égale au produit des probabilités des branches qui le composent. *Cela correspond à la probabilité de l'**intersection ordonnée** des événements qui le composent.*
3. La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins correspondant à cet événement.
4. La probabilité que l'on lit sur une branche est une probabilité conditionnelle : il s'agit de la probabilité de l'issue suivante, sous la condition de réalisation du chemin jusqu'à cette branche.

Exemples :

On reprend l'activité précédente.

1. Calculer les probabilité des événements suivants :
   - F = « Tirer deux boules rouges »
   - G = « Tirer une boule rouge au deuxième tirage sachant que l'on en a tiré une au premier tirage »
   - H = « Tirer une boule verte puis une boule rouge »
   - I = « Tirer une boule rouge au deuxième tirage sachant que l'on a tiré une verte au premier »
   - J = « Tirer une boule rouge au premier tirage »
   - K = « Tirer deux boules de la même couleur »
   - L = « Tirer au moins une boule rouge ? »
2. Déterminer en français de manière claire, puis sous forme d'ensemble les événements suivants :

$$J \cap K \qquad G \cup I \qquad \overline{F} \qquad \overline{L}$$

Exercice 3 :

Sophie a mis des dragées dans une boîte, les unes contiennent une amande, les autres non. On sait que :

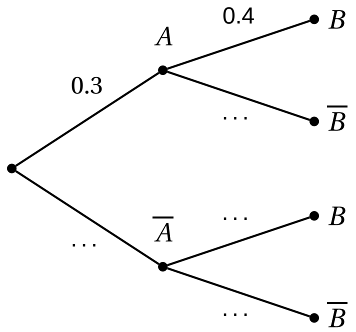
- 30% des dragées contiennent une amande.
- 40% des dragées avec amandes sont bleues„ les autres sont roses ;
- 75% des dragées sans amande sont bleues, les autres sont roses.

Sophie choisit au hasad une dragée dans la boîte. On admet que toutes les dragées ont la même probabilité d'être choisies.

On considère les événements suivants :

- A : « la dragée choisie contient une amande »
- B : « la dragée choisie est bleue »

1. Compléter l'arbre des fréquences donnée ci-dessous



2. Quelle est la probabilité d'obtenir une dragée bleue sachant que la dragée contient une amande ?
3. Décrire l'événement $A \cap B$ par une phrase. Montrer que sa probabilité est égale à 0.12.
4. Calculer la probabilité de l'événement B.
5. Décrire par une phrase l'événement $A \cup B$ par une phrase, puis calculer sa probabilité de deux manières différentes.

Exercices du livre : Hyperbole

n°21 p 250 + $49-50-52$ p 257 (corrigés)

n° 32 (DM) + 33 à 36 + 38 + 40 p 252

IV) Simulations et probabilités

IV-1 Choisir un modèle

Depuis le début de ce chapitre, l'énoncé des problèmes était suffisament clair et détaillé pour choisir une loi de probabilité crédible au regard des expériences aléatoires que l'on a étudié. Mais ce n'est pas toujours le cas.

Dans la vie, les statisticiens se retrouvent plutôt à observer les résultats d'expériences aléatoires puis choisir un modèle convenable, pour pouvoir ensuite faire des prévisions, ie des probabilités.

Dans cette partie, nous allons donc voir comment ils vérifient la crédibilité de leurs modèles, dans des cas simples.

Tout au long du chapitre, les séances de modules ont été réservés à simuler des expériences aléatoires. Notamment, les élèves ont déjà simulé le jeu du passe-10 sur tableur et algobox (TP tableur : Transmath p 158 + n° 70 p 165 pour la théorie, idée présentée à l'oral).

IV-2 Echantillonnage

Définition 11 :
Un échantillon de taille n est la liste de n résultats obtenus par n répétitions indépendantes de la même expérience.

Exemples :
– Lancer $10\,000$ fois trois dés et noter la liste des sommes obtenues, comme le Duc de Toscane.
– Faire $2\,454$ parties du jeu du lièvre et de la tortue et regarder qui gagne.
– Lancer 50 fois une pièce de monnaie et regarder la face obtenue.

Ces trois situations permettent de constituer à chaque fois un échantillon de taille $10\,000$, $2\,454$ et 50.

Remarques :
– Evidemment, les distributions des fréquences observées varient d'un échantillon à l'autre. Ce phénomène s'appelle la **fluctuation d'échantillonnage**.
– Lorsque la taille d'un échantillon augmente, la fluctuation est plus faible en proportion et la distribution des fréquences tend à se rapprocher d'une distribution théorique.

Définition 12 :
On appelle **épreuve de Bernoulli** une expérience qui n'a que deux issues possibles.

Exemples :
– Gagner ou perdre
– Obtenir Pile ou Face
– Répondre oui ou non aux questionx du Duc : « Il y a autant de chances de faire 10 que 9 avec trois dés équilibrés », « La probabilité de faire 9 avec trois dés vaut $\dfrac{6}{56}$ », ou encore, comme nous le pensons nous « La probabilité de faire 9 avec trois dés vaut $\dfrac{25}{216}$ »...

Dans ce chapitre, nous allons étudier les fréquences observées pour certaines expériences de Bernoulli (simulées sur ordinateur, car plus rapide qu'à la main), afin d'estimer certaines proportions p d'un caractère dans une population, ou encore d'estimer la probabilité p de gagner (ou perdre) dans un modèle de Bernoulli.

Exemple :
On dispose d'une pièce de monnaie et on souhaite savoir si elle est bien équilibrée.
On la lance 50 fois (à la main, plus devient fastifieux). On a obtenu 30 Fois pile et 20 fois Face.
Notre échantillon est de taille 50 et nous avons observé une fréquence d'apparition de « Pile » qui vaut $f_P = \dfrac{3}{5} = 0.6$ et une fréquence d'apparition de « Face » qui vaut $f_F = \dfrac{2}{5} = 0.4$.
Peut-on raisonnablement estimer que la pièce est équilibrée et qu'il s'agit simplement de la fluctuation d'échantillonnage ?

Remarque : En fait, on ne peut jamais être sûr de rien, mais d'un point de vue statistique, on peut avoir une idée de la réponse, avec une certaine marge d'erreur.

IV-3 Intervalle de fluctuation

Travail de l'élève **5.** Le jeu du lièvre et de la tortue (n°60 p 259).

Le jeu consiste à affronter un lièvre et une tortue pour parcourir un plateau de 6 cases, selon les règles suivantes :

- On lance un dé équilibré à 6 faces,
- Si le 6 sort, le lièvre avance directement de 6 cases (et donc gagne) ;
- Sinon, la tortue avance d'une case.
- Le jeu continue jusqu'à ce qu'il y ait un gagnant.

1. Quelle est la situation la plus enviable, celle du lièvre ou de la tortue ?

2. On appelle p la probabilité de gagner du lièvre. Conjecturer la valeur de p.

3. Simuler ce jeu sur Algobox, avec en affichage la fréquence de gain du lièvre.
On commencera par demander à l'utilisateur le nombre de parties qu'il souhaite faire.

4. Les résultats de la simulation pour 50 expériences vous semblent-ils en accord avec votre conjecture ? Pour 100 ? 10 000 ?

5. Les statisticiens ont établi le résultat suivant :
Il y a environ 95% de chance que la fréquence observée soit comprise dans l'intervalle $I = \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}, p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

   a. Pour $n = 50$ et la valeur de votre p, déterminer l'intervalle I.
   Peut-on conclure que votre conjecture pour p est bonne ?

   b. Reprendre la question 3.a. pour $n = 100$, puis pour $n = 10000$.

6. Trouver la probabilité théorique de gain de lièvre, grâce à un arbre de probabilité contenant les événements 6 et $\overline{6}$.

7. Vérifier que la fréquence que vous avez observée se situe bien dans l'intervalle I pour $n = 10000$ et la vraie valeur de p.

On étudie un échantillon d'épreuves de Bernoulli et on s'intéresse à l'une des deux issues (par exemple, obtenir pile dans un tirage de pile ou face). On note p la probabilité qu'elle se réalise.

Théorème 2 :
Si on analyse un grand nombre d'échantillons de taille n ($n \geq 25$) et que l'on observe à chaque fois la fréquence d'apparition f de l'issue choisie, on s'aperçoit que pour une probabilité p comprise entre $0,2$ et $0,8$, au moins 95% des fréquences se situent dans un intervalle $I = \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}, p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ appelé **intervalle de fluctuation** des fréquences au seuil de 95%.

Prendre une décision à partir d'un échantillon
Pour apprécier si une fréquence observée f sur un échantillon de taille n est compatible avec un modèle de Bernoulli de probabilité p, on teste l'appartenance de la fréquence observée f à l'intervalle de fluctuation I.
Si f n'est pas dans l'intervalle I, alors on peut rejeter l'hypothèse que l'échantillon soit compatible avec le modèle.
Sinon, on ne peut pas conclure car on ne peut pas rejeter l'hypothèse que l'échantillon soit compatible avec le modèle (et on ne peut pas non plus affirmer que l'échantillon suit le modèle).

Remarque : Quelle que soit la décision prise, il y a toujours un risque que ce ne soit pas la bonne décision dans 5% des cas.

Exemple :

Dans l'exemple précédent de la pièce de monnaie, on a $n = 50$ et on suppose $p = \frac{1}{2}$.

On calcule $p - \frac{1}{\sqrt{n}} = 0,5 - \frac{1}{\sqrt{50}} \simeq 0,36$ et $p + \frac{1}{\sqrt{n}} = 0,5 + \frac{1}{\sqrt{50}} \simeq 0,64$.

L'intervalle de fluctuation est alors $I \simeq [0.36; 0.64]$.

Le théorème précédent assure que si on effectue la même expérience avec une pièce qui est parfaitement équilibrée alors, dans au moins 95% des cas, on observa une fréquence de pile comprise $0,36$ et $0,64$.

Notre observation est donc « fréquente » pour une pièce bien équilibrée, par conséquent on n'a aucune raison de refuser l'hypothèse « la pièce est bien équilibrée. »

Contre-Exemple :

Peut-on appliquer ce théorème et notre simulation pour répondre au Duc de Toscane et lui dire s'il a raison ou tort de considérer que $P(9) = \frac{6}{56}$?

Exercice 4 :

Au casino Belle-vue, sur 2500 lancés de dés, 1150 ont donné un nombre pair. Il y a lieu de faire une enquête pour utilisation de dés truqués ?

Même question pour un autre casino, où 1200 lancés ont donné un nombre pair.

Exercice 5 :

On a vendu à un grossiste 50 000 appareils électroniques en certifiant qu'au moins 80% ne présentent aucun défaut de fonctionnement. En prélevant 250 appareils au hasard et en les testant, on s'aperçoit que seulement 74% n'ont pas de défaut de fonctionnement.

Peut-on penser que le grossiste a été trompé ?

Même question pour un échantillon de 300 appareils.

Exercice 6 :

Dans une commune de plus de 50000 habitants, la proportion de femmes est $0,5$. Le conseil municipal est composé de 43 personnes dont 17 femmes.

Peut-on affirmer qu'au conseil municipal, la parité des sexes n'est pas respectée ?

Exercice 7 :

Dans une population de truites de rivière, le sex ration (proportion de mâles et de femelles) est de $0,5$ pour chaque sexe. Certaines pollutions par des produits pharmaceutiques modifient ce sex ration en augmentant la proportion de femelles. Sur un prélèvement de 100 truites de rivière, on a relevé une fréquence de femelles égale à $0,64$.

Peut-on considérer que cela est dû au seul hasard ou bien doit-on suspecter une pollution ?

Exercice 8 :

Lors d'un sondage effectué auprès de 900 personnes, 51% d'entre elles déclarent vouloir voter pour le candidat A. En supposant que les personnes sondées ont répondu sincèrement et qu'elles ne changeront pas d'avis le jour du vote, le candidat A peut-il raisonnablement penser qu'il sera élu au premier tout (c'est-à-dire avec plus de 50% des voix) ?

IV-4 TPs Tableur

Problème 1

Dans la ville imaginaire de Sir (issue d'un roman de Diane Meur, « les villes de la plaine ») on a observé que les familles avaient toutes un, deux ou trois enfants. On souhaite savoir quelle la probabilité qu'une famille croisée au hasard ait un, deux ou trois enfants dans cette population.
On a retrouvé l'algorithme d'un ingénieur siriote, qui connaissait la réponse à la question précédente. Par chance on parvient à faire fonctionner son algorithme sur un ordinateur, par contre on a réussi à le décrypter qu'en partie.

Voici l'algorithme :

```
VARIABLES
  compteur1 EST_DU_TYPE NOMBRE
  compteur2 EST_DU_TYPE NOMBRE
  compteur3 EST_DU_TYPE NOMBRE
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  i EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  POUR i ALLANT_DE 1 A 1000
    DEBUT_POUR
    n PREND_LA_VALEUR un nombre entier au hasard entre ? et ?
    SI (impossible à décrypter) ALORS
      DEBUT_SI
      compteur1 PREND_LA_VALEUR compteur1+1
      FIN_SI
    SI (impossible à décrypter) ALORS
      DEBUT_SI
      compteur2 PREND_LA_VALEUR compteur2+1
      FIN_SI
    SI (impossible à décrypter) ALORS
      DEBUT_SI
      compteur3 PREND_LA_VALEUR compteur3+1
      FIN_SI
    FIN_POUR
  AFFICHER "Si on croise 1000 familles alors :"
  AFFICHER compteur1
  AFFICHER " familles ont exactement 1 enfant"
  AFFICHER compteur2
  AFFICHER " familles ont exactement 2 enfants"
  AFFICHER compteur3
  AFFICHER " familles ont exactement 3 enfants"
FIN_ALGORITHME
```

1. Formuler une hypothèse (en observant les résultats obtenus en exécutant ce programme) sur les probabilités que les familles de Sir aient un, deux ou trois enfants.
Pour cela, compléter le tableau suivant :

Enfants par famille	1	2	3	Total
Probabilités théoriques (hypothèse)				

2. Le résultat d'une simulation est le suivant : Si on croise 1000 familles alors :
450 familles ont exactement 1 enfant
325 familles ont exactement 2 enfants
225 familles ont exactement 3 enfants.
Pensez-vous que les écarts entre les fréquences observées dans cette simulation et les probabilités théoriques (i.e vos hypothèses) s'expliquent par la seule fluctuation d'échantillonage due au hasard ? Êtes-vous sûr d'avoir raison ?

3. Ecrire un programme sur algobox similaire à celui qui est donné avec vos hypothèses.

4. Observer les résultats de vos simulations avec les résultats de simulations effectuées avec l'ordinateur du professeur. Commenter.

5. Le professeur révèle le programme original, ou pas.

Problème 2

Simuler le lancé de deux pièces de monnaie.

En lançant deux pièces de monnaie correctement équilibrées, on peut obtenir :

– Deux côtés Pile

– Deux côtés Face

– Un côté Pile et l'autre Face

Norbert émet l'hypothèse qu'en effectuant un grand nombre de fois l'expérience, la fréquence d'obtenir deux côtés Pile est proche de $\frac{1}{3}$.

On souhaite simuler cette expérience à l'aide d'un tableur et vérifier si l'hypothèse semble correcte ou si elle doit être rejetée.

1. **a.** Reproduire la feuille de calcul ci-dessous :

   b. Ecrire une instruction qui donne un nombre aléatoire qui vaut 0 ou 1.

   c. Quelle instruction permet d'obtenir la somme des nombres situés dans les cellules $A2$ et $B2$?

   d. Ecrire une instruction qui permet d'avoir le nombre de cellules de contenu égal à 0 dans la plage $C1$ à $C100$, dans la plage $C1$ à $C500$ et dans la plage $C1$ à $C1000$.

2. Pour effectuer la simulation, on assimile le côté Pile au nombre 0 et le côté Face au nombre 1.

   a. A quelle somme correspond « Obtenir deux côtés Pile » ?

   b. Mettre en place une feuille de calcul comme celle représentée par l'enseignant avec :

   – Dans les colonnes A et B et sur $1\,000$ lignes, des nombres aléatoires 0 ou 1

   – Dans la colonne C, la somme par les ligne des colonnes A et B

   – Dans les cellules $E2$, $F2$ et $G2$, le nombre de fois où le nombre 2 figure dans les 100, 500 ou $1\,000$ premières lignes de la colonne C

   – Dans les cellules $E3$, $F3$ et $G3$, les fréquences correspondantes.

3. Les statisticiens ont établi le résultat suivant :

   Il y a environ 95% de chance que la fréquence observée soit comprise dans l'intervalle $I = \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}, p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

   a. Pour $n = 100$, déterminer l'intervalle I.

   Peut-on conclure que la conjecture de Pierre $p = \frac{1}{3}$ est bonne ?

   b. Reprendre la question 3.a. pour $n = 500$, puis pour $n = 1\,000$.

Exercices du livre :

Pour aller plus loin : simuler le jeu des portes sur Tableur ou/et Algobox (n°62 p 260)

« La physique est bien trop dure pour les phycisiens »

DAVID HILBERT, mathématicien