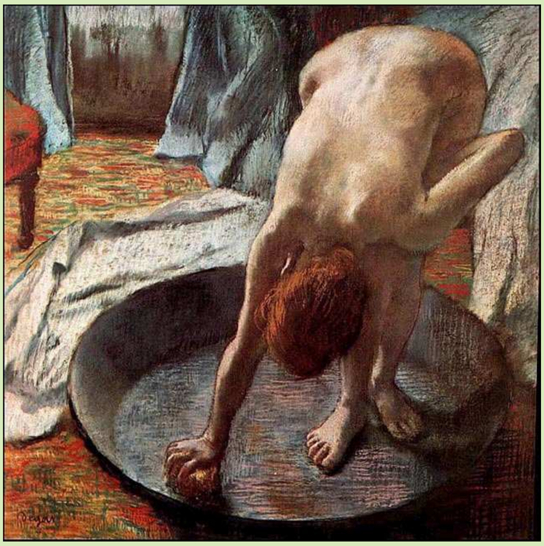
Chapitre 1

Lectures graphiques plus ou moins intelligentes

Hors Sujet



Titre : « Autoportrait (1863) » et « Le Tub (1885) »

Auteur : Edgar Degas

Présentation succinte de l'auteur : Edgar Degas (1834-1917) est un peintre français, en général rattaché au mouvement impressionniste, formé à la fin du XIXe siècle, en réaction à la peinture académique de l'époque.

Sa carrière fut dès le départ influencée par les danseuses. En 1874, il commence à se faire connaître, les critiques louant ou dénigrant le réalisme de son travail. Il explore des thèmes comme les repasseuses ou les femmes à leur toilette, multipliant les points de vue audacieux, recherchant des effets lumineux et colorés. Il dit d'ailleurs à propos de ses nus : « Jusqu'à présent, le nu avait toujours été représenté dans des poses qui supposent un public. Mais mes femmes sont des gens simples... Je les montre sans coquetterie, à l'état de bêtes qui se nettoient. »

A partir des années 1880, Degas va aussi poser la question d'une sculpture « impressionniste », réalisant des modèles en cire peints au naturel, qu'il accessoirise ensuite. Seule *La Grande Danseuse* (cf première page) fut présenté de son vivant, les autres modèles l'aidant surtout dans ses peintures. Cette incarnation de la grâce et de l'innocence trahit en réalité la fascination de Degas pour la criminalité. En effet, avec son visage est sculpté sur le modèle des physionomies de criminels définies à l'époque, et la danseuse était un parfait « petit rat », transmettant la syphilis aux bourgeois venant la voir ...

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : C. Aupérin
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée : Jules Fil (Carcassonne)

Table des matières

« *Quand quelqu'un paye un tableau* 3 000 *francs, c'est qu'il lui plaît.*
Quand il le paye 300 000 *francs, c'est qu'il plaît aux autres.* »

EDGAR DEGAS

Leçon 3

Lectures graphiques

plus ou moins intelligentes

Introduction

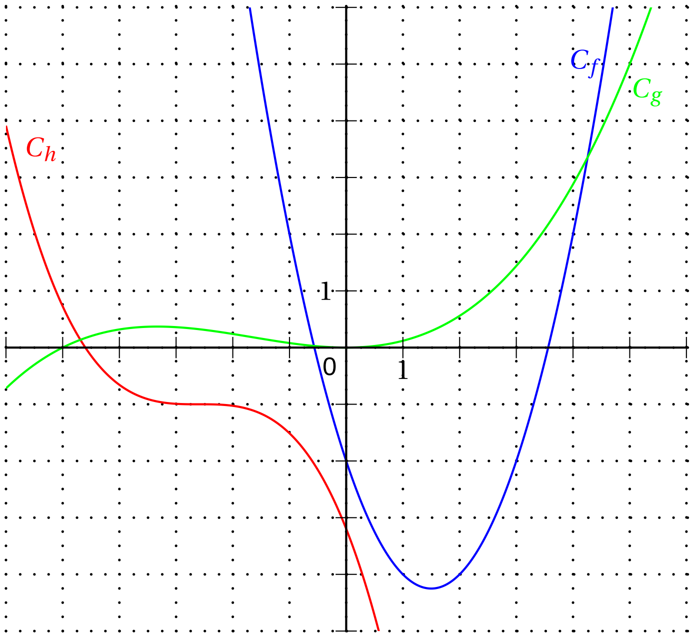
L'objectif principal de ce chapitre est de maîtriser la lecture graphique des courbes représentatives de fonctions, sous (presque) toutes les coutures.
Nous allons donc revoir les lectures d'images, d'antécédents et d'ensemble de définition, mais également apprendre résoudre graphiquement des équations, des inéquations, et à donner graphiquement le signe d'une fonction.
Cependant, nous verrons qu'avec un peu d'intelligence, on peut répondre exactement et simplement à des questions de lecture graphique.

I) Résolution graphique d'équations et inéquations

I-1 Méthodes de résolution

Travail de l'élève **1.** Soient f, g et h trois fonctions définies par le graphique ci-contre :
Résoudre graphiqement :

1. $f(x) = -2$ $S = \dots\dots\dots\dots$
2. $g(x) = 0$ $S = \dots\dots\dots\dots$
3. $h(x) = 1$ $S = \dots\dots\dots\dots$
4. $f(x) = g(x)$ $S = \dots\dots\dots\dots$
5. $f(x) = h(x)$ $S = \dots\dots\dots\dots$
6. $g(x) = h(x)$ $S = \dots\dots\dots\dots$
7. $f(x) < -2$ $S = \dots\dots\dots\dots$
8. $g(x) \geq 0$ $S = \dots\dots\dots\dots$
9. $f(x) \geq h(x)$ $S = \dots\dots\dots\dots$
10. $f(x) < h(x)$ $S = \dots\dots\dots\dots$



Soient deux fonctions f et g définies sur un intervalle I, $k \in \mathbb{R}$. On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes représentatives respectives.

Méthode pour résoudre graphiquement $f(x) = k$
On trace sur I :
- la courbe $\mathscr{C}_f$
- la droite d d'équation $y = k$ (représentative de la fonction affine constante égale à k).

Les solutions de l'équation sont les abscisses des éventuels points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et d.

Remarques :
- Cela revient à trouver graphiquement tous les antécédents de k appartenant à I.
- L'ensemble des solutions est une liste de nombres, on le note avec des accolades.

Exemple :

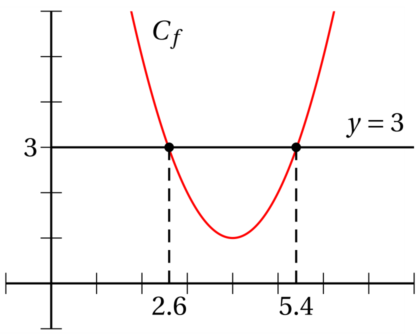
Résoudre graphiquement sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$(x-4)^2 + 1 = 3$$

On trace la courbe représentative de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-4)^2 + 1$ et la droite d'équation $y = 3$.

On trouve $S = \{2.6; 5.4\}$

Vérifier à la calculatrice.



Méthode pour résoudre graphiquement $f(x) < k$

On trace sur I :

- la courbe $\mathscr{C}_f$
- la droite d d'équation $y = k$ (représentative de la fonction affine constante égale à k).

Les solutions de l'équation sont les abscisses des éventuels points de $\mathscr{C}_f$ se trouvant au dessous de d.

Remarque : L'ensemble des solutions est un intervalle ou une réunion d'intervalle, on le note avec des crochets.

Exemple :

Dans l'exemple ci-dessus, on trouve $S =]2.6;5.4[$.

Si on cherche à résoudre $f(x) \leq 3$ on trouve $S = [2.6;5.4]$.

Si on cherche à résoudre $f(x) > 3$ on trouve $S =]-\infty;2.6[\cup]5.4;+\infty[$.

Si on cherche à résoudre $f(x) \geq 3$ on trouve $S =]-\infty;2.6] \cup [5.4;+\infty[$.

Méthode pour résoudre graphiquement $f(x) = g(x)$

On trace sur I les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Les solutions de l'équation sont alors les abscisses des éventuels points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Exemple :

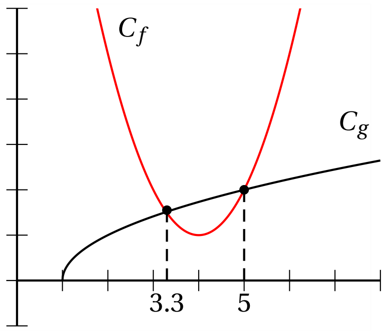
Résoudre graphiquement sur $[-1;+\infty[$ l'équation

$$(x-4)^2 + 1 = \sqrt{x+1}$$

On trace les courbes représentatives des fonctions $f : x \mapsto (x-4)^2 + 1$ définie sur $\mathbb{R}$ et $g : x \mapsto \sqrt{x+1}$ définie sur $[-1;+\infty[$.

On trouve $S = \{3.3;5\}$

Vérifier à la calculatrice.



Méthode pour résoudre graphiquement $f(x) < g(x)$

On trace sur I les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Les solutions de l'inéquation sont alors les abscisses des éventuels points de C_f situés au-dessous de C_g.

Exemple :

En prenant l'exemple ci-dessus, on trouve $S =]3.3;5[$.

Si on cherche à résoudre $f(x) \leq g(x)$ on trouve $S = [3.3;5]$.

Si on cherche à résoudre $f(x) > g(x)$ on trouve $S =]-\infty;3.3[\cup]5;+\infty[$.

Si on cherche à résoudre $f(x) \geq g(x)$ on trouve $S =]-\infty;3.3] \cup [5;+\infty[$.

Remarque : Il existe diverses manières de poser la même question : n° 32 p 71 (lignes 1, 2 et 4)

Exercices du livre : Hyperbole

n° 11-14 à 16 p 47 + 29 p 48 + QCM et Vrai-Faux p 54 + n° 58 à 60 p 55 + n ° 10 à 13-15-16 p 67

I-2 Lecture intelligente

Travail de l'élève **2.**

1. Tracer sur votre calculatrice la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto x^2$
2. Résoudre graphiquement l'inéquation $x^2 < 5$.
3. Pouvez-vous donner l'ensemble exact des solutions ?

Lorsque que l'on connaît l'expression algébrique de la fonction, on peut parfois être plus précis dans nos réponses, sans forcément avoir besoin de beaucoup de calculs.

Exemples :

– L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 \geq 5$ est $\mathscr{S} = \left]-\infty; -\sqrt{5}\right] \cup \left[\sqrt{5}; +\infty\right[$.
– Résoudre graphiquement mais exactement l'inéquation $3x + 5 > 1$

Exercices du livre : Hyperbole

n° 20 p 121

Exercice 1 **:**

1. Tracer la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto x^2$.
2. Trouver à l'aide du graphique les solutions des inéquations suivantes :

   a. $x^2 \leq 3$ **b.** $x^2 \geq 2$ **c.** $1 \leq x^2 \leq 5$

Exercice 2 **:**

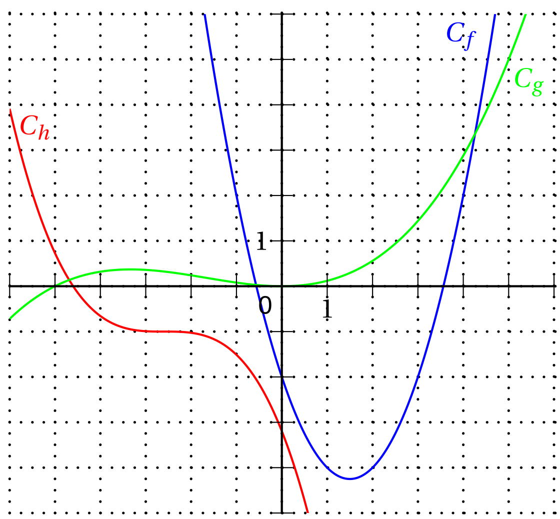
1. Tracer sur votre calculatrice la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$.
2. Trouver à l'aide du graphique les solutions des inéquations suivantes :

   a. $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{x} \leq 1$ **b.** $-1 \leq \dfrac{1}{x} \leq -\dfrac{1}{4}$ **c.** $-\dfrac{1}{4} \leq \dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{2}$

II) Signes d'une fonction

II-1 Tableau de signes

Travail de l'élève **3.** Donner le signe de chacune des fonctions f, g et h représentées ci-contre.



Lorsqu'on demande le signe d'une fonction f, on demande en fait de résoudre simultanément :

$$f(x) < 0 \qquad f(x) = 0 \qquad f(x) > 0$$

Graphiquement, il s'agit respectivement de quand la courbe représentative de f est en-dessous de l'axe des abscisses, coupe l'axe des abscisses et est au-dessus de l'axe des abscisses.
Nous savons donc théoriquement déjà faire cela.
La seule nouveauté sera la manière de présenter les résultats. En effet, pour plus de clarté, nous les consignerons dans un tableau, appelé tableau de signes

- La première ligne du tableau contiendra les valeurs critiques de x : celles pour lesquelles f s'annule et/ou change de signe.
  On ne tient pas compte de l'échelle, on espace ces valeurs de manière homogène.
- La seconde ligne contient le signe de $f(x)$ correspondant aux cases formées par la première ligne. On résume le signe par $+$ et $-$.
  Dans cette ligne, on fait également apparaître un 0 sous les valeurs des x qui annulent f.

Exemple :
Dans l'activité précédente, on aurait donc pu répondre :

x	$-\infty$		-0.6		3.6		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		-5		0		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

x	$-\infty$		-4.7		$+\infty$
$h(x)$		$+$	0	$-$	

Exercices du livre : Hyperbole
n° 17-18 p 67

II-2 Lecture intelligente

II-2.1 Somme, produit, carré et inverse

Travail de l'élève **4.** Pouvez-vous donner le signe des fonctions f, g, h, k et l suivantes sans regarder leur courbe représentative ?

- $f(x) = 35x^2 + 8$,
- $g(x) = -4x^2 - 3$
- $h(x) = \dfrac{1}{x}$
- $k(x) = 3x + 5$
- $l(x) = 35x^2 + 38x + 8$

On sait qu'un carré est toujours positif et qu'un nombre et son inverse sont de même signe.
Ainsi, une expression ne contenant que des carrés, des sommes de nombres positifs, des multiplications par un

nombre positif et/ou des inverses de nombres positifs sera toujours positive.
Il est dans ce cas inutile de regarder la courbe représentative de la fonction correspondante.

Exemple :

Soient les fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2+3$, $g(x) = \dfrac{1}{x^2+3}$ et $h(x) = -4x^2-7$.
Les fonctions f et g sont toujours positives (leurs courbes représentatives sont au-dessus de l'axe des abscisses).
Tandis que la fonction h est toujours négative (sa courbe représentative est en-dessous de l'axe des abscisses).

Contre-Exemple :

Soient les fonctions k et l définies par $k(x) = 3x+5$ et $l(x) = 35x^2+38x+8$.
Comme la variable x peut être négative (même si son signe n'est pas visible dans l'expression des fonctions), les fonctions k et l changent de signe.

II-2.2 Fonctions affines

Travail de l'élève **5.** Etudions par lecture intelligente le signe de la fonction k définie précédemment par $k(x) = 3x+5$.

1. Lecture graphique simple : donner graphiquement le tableau de signes de k.
2. Lecture graphique intelligente :
   - **a.** Donner la nature de la fonction k. Que pouvez-vous en déduire sur sa représentation graphique ?
   - **b.** Quel est le coefficient directeur de k ? Que pouvez-vous en déduire sur l'orientation de sa courbe repésentative ?
   - **c.** Résoudre $k(x) = 0$
   - **d.** En déduire le tableau de signes exact de k.

Propriété 1 : *Signe d'une fonction affine*

Soit f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax+b$ avec $a \neq 0$.
Alors $f(x) = 0$ pour $x = -\dfrac{b}{a}$ et

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
Signe de $ax+b$		Signe Opposé de a	0	Signe de a	

Remarque : On retiendra que la fonction est du signe de a à **droite** du 0 (du signe opposé sinon).

Preuve

Si $a > 0$ (on raisonne de même si $a < 0$) :

$$ax+b=0 \overset{-b}{\iff} ax=-b \overset{\times\frac{1}{a}}{\iff} x=-\frac{b}{a}$$

$$ax+b>0 \overset{-b}{\iff} ax>-b \overset{\times\frac{1}{a}>0}{\iff} x>-\frac{b}{a}$$

$$ax+b<0 \overset{-b}{\iff} ax<-b \overset{\times\frac{1}{a}>0}{\iff} x<-\frac{b}{a}$$

Exemple :

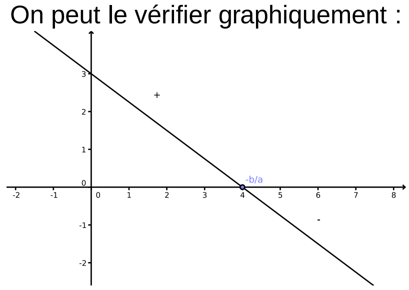
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\dfrac{3}{4}x + 3$. On a :

$$f(x) = 0 \iff -\frac{3}{4}x + 3 = 0 \iff -\frac{3}{4}x = -3 \iff x = -\frac{3}{-\frac{3}{4}} = 3 \times \frac{4}{3} = 4$$

De plus, $a < 0$. Donc la fonction f admet pour tableau de signes :

x	$-\infty$		4		$+\infty$
Signe de $-\dfrac{3}{4}x+3$		$+$	0	$-$	

On peut le vérifier graphiquement :



Exercices du livre : Hyperbole

Refaire le 17 p 67

II-2.3 Produit (ou quotient) de fonctions affines

Travail de l'élève **6.** Etudions par lecture intelligente le signe de la fonction l définie précédemment par $l(x) = 35x^2 + 38x + 8$, ainsi que celui d'autres fonctions.

1. La fonction l :

- **a.** Donner graphiquement le tableau de signes de l.
- **b.** Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $l(x) = (5x+4)(7x+2)$
- **c.** Résoudre $l(x) = 0$.
- **d.** En déduire le tableau de signes exact de l.

2. Soient les fonctions m et n définies sur $\mathbb{R}$ par $m(x) = -2x + 1$ et $n(x) = -6x - 2$.

- **a.** Etablir le tableau de signes des fonctions m et n
- **b.** Etablir graphiquement le tableau de signe de la fonction p définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = (-2x+1)(-6x-2)$.
- **c.** Comment retrouver ce résultat par le calcul ?
- **d.** Etablir graphiquement le tableau de signe de la fonction r définie sur $\mathbb{R}$ par $r(x) = \dfrac{-2x+1}{-6x-2}$.
- **e.** Comment retrouver ce résultat par le calcul ?

Signe d'un produit (ou d'un quotient)

Grâce à la règle des signes dans une multiplication (ou une division), on peut trouver le signe d'un produit (ou d'un quotient) d'expressions du type $ax + b$.

Pour cela, on commence par résoudre l'équation produit nul (ou le dénominateur égal à 0, ainsi que le numérateur) , puis on utlise un grand tableau de signes.

Sur la dernière ligne, on trouve le signe du produit (ou du quotient) en appliquant la règle des signes.

Attention !

- On ne peut pas appliquer cette règle pour une addition d'expression du type $ax+b$, car on n'a pas de règle de signes dans ce cas là !
- $(ax+b)(cx+d)$ est positif quand $ax+b$ et $cx+d$ sont tous les deux positifs certes, mais aussi quand ils sont tous les deux négatifs !
  Ceci est long à écrire, lors d'une résolution classique. Le tableau de signe s'avère alors rapide et efficace pour trouver le signe de ce type d'expressions.
- On notera que 0 multiplié par n'importe quoi donne 0.
  Par contre, n'importe quoi divisé par 0 donne une valeur interdite !

Exemples :

1. On souhaite résoudre $(2x+1)(-x+2) \leq 0$. On a :

$$(2x+1)(-x+2)=0 \iff 2x+1=0 \quad \text{ou} \quad -x+2=0 \iff x=-\frac{1}{2} \quad x=2$$

Le tableau de signe de cette expression est :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
Signe de $2x+1$		$-$	0	$+$	⋮	$+$	
Signe de $-x+2$		$+$	⋮	$+$	0	$-$	
Signe de $(2x+1)(-x+2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Conclusion : $(2x+1)(-x+2)=0$ ssi $x \in \left\{-\frac{1}{2};2\right\}$

$(2x+1)(-x+2)>0$ ssi $x \in \left]-\frac{1}{2};2\right[$ et $(2x+1)(-x+2)<0$ ssi $x \in \left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[\cup \left]2;+\infty\right[$

L'ensemble des solutions de l'inéquation $P(x) \leq 0$ est donc $S=\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right] \cup \left[2;+\infty\right[$

2. Résoudre $Q(x)=\dfrac{2x+1}{-x+2} \leq 0$.

On sait que $2x+1=0 \iff x=-\frac{1}{2}$ et on sait que $-x+2=0 \iff x=2$ (valeur interdite).
On a donc le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
Signe de $2x+1$		$-$	0	$+$	⋮	$+$	
Signe de $-x+2$		$+$	⋮	$+$	0	$-$	
Signe de $\dfrac{2x+1}{-x+2}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $Q(x) \leq 0$ est donc $S=\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right] \cup \left]2;+\infty\right[$

Exercice 3 :

On considère les fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - 3x \qquad g(x) = x^3 - 3x \qquad h(x) = x - 3$$

1. Etablir à la calculatrice un tableau de valeurs pour les trois fonctions, allant de -2 à 4, de pas 0.5.
2. Tracer dans un même repère orthogonal les représentations graphiques $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ respectivement des fonctions f, g et h sur $[-2;4]$.
   Unités graphiques : 2 cm pour l'axe des abscisses, 1 cm pour l'axe des ordonnées.
3. Est-il vrai que le point de coordonnées $(0.5;-1.3)$ appartient à $\mathscr{C}_g$? Justifier.
4. Etablir les tableaux de signes de f, g et h (on factorisera éventuellement les expressions).
5. À l'aide des graphiques, déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_h$
6. Comparaison des fonctions f et g :
   - **a.** À l'aide du graphique, déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$
   - **b.** Pour avoir plus de précision, on se propose de retrouver ces résultats par le calcul :
     - i. Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$
     - ii. En déduire, par le calcul, les coordonnées des points A et B d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$
   - **c.** Sur quel(s) intervalle(s) a-t-on $f \leq g$?

Exercice 4 :

On donne la fonction h définie par $h(x) = (x+3)^2 - 4$.

1. Quel est l'ensemble de définition de la fonction h ?
2. Tracer la courbe représentative de la fonction h sur $[-6;0]$ (unité graphique : 1 cm sur chaque axe).
3. Factoriser $h(x)$ et vérifier que, pour tout $x \in D_h$, on a $h(x) = (x+1)(x+5)$.
4. Développer la forme 1 et vérifier que, pour tout $x \in D_h$, on a $h(x) = x^2 + 6x + 5$
5. En choisissant la forme la plus appropriée de h, répondre aux questions suivantes :
   - **a.** Calculer l'image de 0 puis celle de -3 par h.
   - **b.** Calculer la valeur exacte de $h(\sqrt{2})$ (calculs détaillés).
   - **c.**
     - i. Déterminer par le calcul les éventuels antécédents de 0 par h.
     - ii. En déduire le tableau de signe de h et résoudre $h(x) \leq 0$.
   - **d.**
     - i. Déterminer s'ils existent, les antécédents de -4 par h.
     - ii. En déduire alors à l'aide du graphique les solutions de $h(x) \geq -4$
   - **e.**
     - i. Déterminer s'ils existent, les antécédents de 5 par h.
     - ii. En déduire alors à l'aide du graphique les solutions de $h(x) \geq 5$

Exercices du livre : Hyperbole

8-13 p 120 + 15-17-18-19-26-28-29-31 p 121 + 34-35 p 123 + 46-48-49-50-51 p 125

III) Un peu d'algo : les boucles Si et Pour

Exercice 5 :

On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = 2x^2 - x + 1$ et $g(x) = \dfrac{3x+1}{2x-1}$.

1. Quel est l'ensemble de définition de f ? Celui de g ?
2. **Boucle Si**.
   - **a.** Que fait l'algorithme 1 ?
   - **b.** Ecrire un algorithme similaire pour la fonction g (en prenant soin de traiter à part le cas de la valeur interdite)
3. **Boucle Pour.**
   - **a.** Que fait l'algorithme 1 ?
   - **b.** Ecrire un algorithme qui donne un tableau de valeurs de g, pour x allant de -2 à 3, avec un pas de 0.5 (avec pour réponse « valeur interdite » quand nécessaire).

Exercice 6 :

On considère la fonction f définie sur $[-2;4]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x \in [-2;1] \\ -x^2+1 & \text{si} \quad x \in]1;4] \end{cases}$$

1. Ecrire un algorithme qui permette de calculer l'image par f d'un nombre x.
2. Construire la courbe représentative de f.

Exercice 7 :

On considère l'algorithme suivant :

1. Faire fonctionner cet algorithme pour $x = -2$, $x = 1$ et $x = 3$.
2. Cet algorithme définit une fonction f.
   - **a.** Donner l'ensemble de définition de f.
   - **b.** Exprimer $f(x)$ en fonction de x.
   - **c.** Représenter graphiquement la fonction f.

Algorithme 1 :

Variables
    x, y et a sont des nombres réels

Début
    Entrer x et y
    a prend la valeur $2x^2 - x + 1$
    Si $(y == a)$ **Alors**
        Afficher « Le point $(x; y)$ appartient à la courbe représentative de f »
    Sinon
        Afficher « Le point $(x; y)$ n'appartient pas à la courbe représentative de f »
    Fin Si
Fin

Algorithme 2 :

Variables
    x, y et i sont des nombres réels

Début
    Entrer x
    Pour $i = -3$ **à** 5 **Faire**
        y prend la valeur $2x^2 - x + 1$
        Afficher $(x; y)$
        i prend la valeur $i + 1$
    Fin Pour
Fin

Algorithme 3 :

Variables
    x et y sont des nombres réels

Début
    Entrer x
    Si $(x < 1)$ **Alors**
        $y \leftarrow x^2$
    Sinon
        $y \leftarrow 2x$
    Fin Si
    Afficher y
Fin