CHAPITRE 2

LA TÊTE DANS LES ÉTOILES

HORS SUJET

TITRE : « Swim »
AUTEUR : CARIBOU
PRÉSENTATION SUCCINTE DE L'AUTEUR : Depuis ses débuts sous le nom de Manitoba, le canadien Dan Snaith n'en finit plus de sonder en profondeur l'électro-pop. Passé l'expérience Manitoba, Dan s'est accaparé les commandes du groupe Caribou. groupe qui n'a jamais cherché à écrire la pop-song parfaite, celle que l'on se prend à fredonner dans la rue. La démarche pop et la dimension psychédélique du groupe se concentre sur la structure chirurgicale des morceaux. Il y a cette impression tenace de tenir avec l'album *Swim* l'alchimie parfaite entre les expérimentations audacieuses d'Animal Collective et les comptines électronica de Four Tet. Caribou atteint ici un niveau insoupçonné d'homogénéité et semble parvenir à une sorte de plénitude. *Swim* se révèle plus sombre que ses prédécesseurs, mais jamais plombant, notamment sur l'électro 80's d'un Leave House chancelant et sur le fantastique Found Out dont les trois minutes d'électro-pop risquent fortement de parasiter durablement vos pensées par la force d'un thème d'une simplicité désarmante.
Caribou signe là un brillant album de pop électronique ingénieuse et démontre une fois de plus tout le génie de Dan Snaith. Il n'en reste pas moins que Caribou est un groupe prenant toute sa mesure en live où ses prestations psychédéliques révèlent tout leur pouvoir hypnotique et il y a fort à parier qu'avec ce nouvel album, les prochains concerts vont être sublimés.

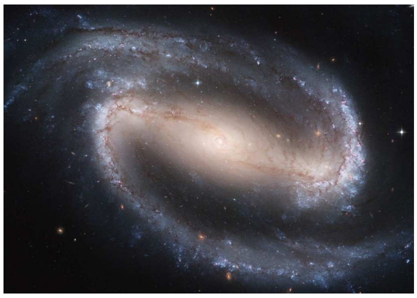
Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : C. Aupérin
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée : Jules Fil (Carcassonne)

Table des matières

« *Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous* »

THURSTON MOORE (SONIC YOUTH)

Leçon 3



La tête dans les étoiles

Résumé

Nous allons tenter à travers ce chapitre de nous familiariser avec ce que l'on appelle la dimension 3 : l'espace. Une des plus grandes difficultés sera de parvenir à voir des figures spatiales, alors qu'elles sont tracées sur une feuille (donc dans un plan), c'est-à-dire en dimension 2.
Nous rappellerons quelques règles de perspective cavalière, ainsi que les pièges qu'il faudra éviter.
L'élève curieux peut se demander si on peut aller plus loin dans les dimensions... En effet, durant la scolarité, on ne cesse d'augmenter le nombre de dimension, 1 avec les droites, 2 avec la géométrie plane et 3 avec l'espace. Et bien oui ! On peut définir des espaces de dimension 4, le plus connu étant l'espace-temps. Il devient difficile par contre de représenter de telles géométries...
On peut aussi se demander si la perspective cavalière est la seule manière de représenter l'espace. La réponse est non, en peinture il n'est pas rare de voir une autre manière de représenter l'espace : la perspective parallèle.

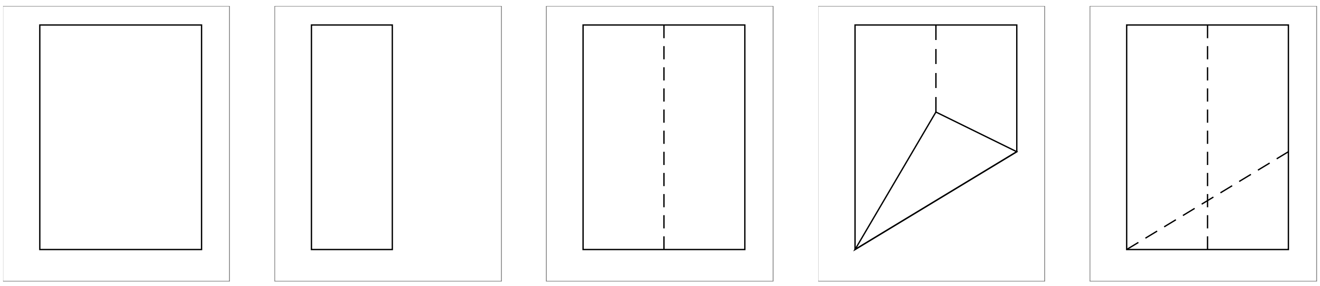
I) Bases de la géométrie dans l'espace

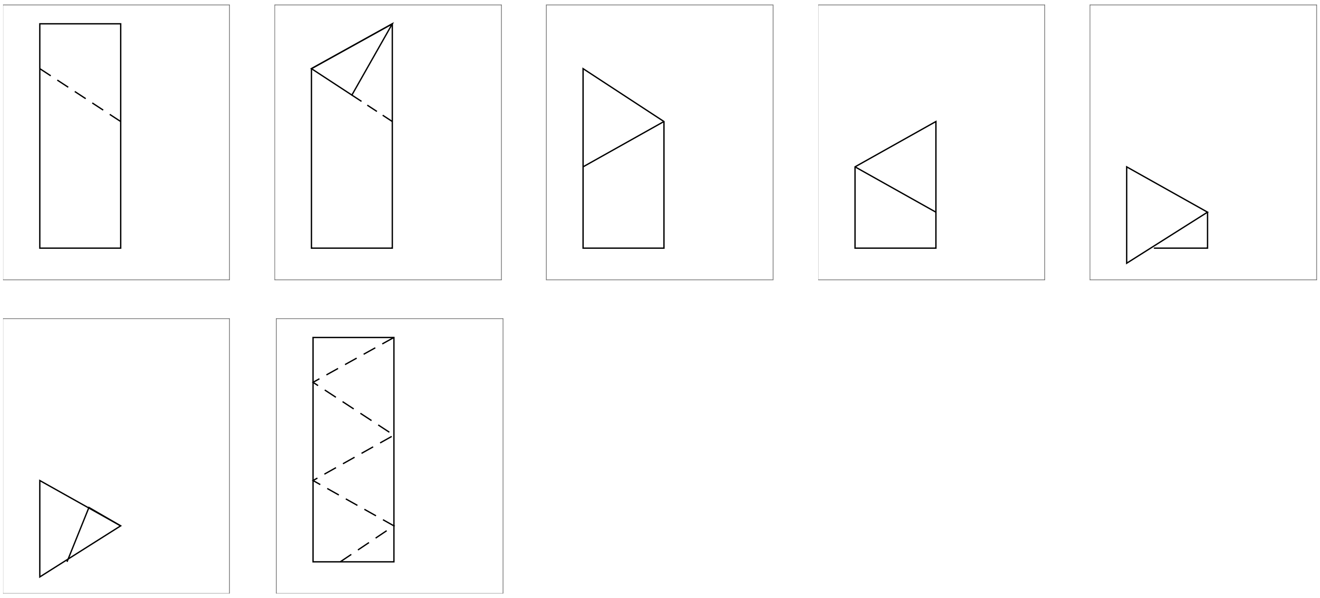
Cette partie se construit tout au long d'une activité, consistant à étudier un tétraèdre et sa construction en origamie.

I-1 Les solides : construction, représentations, volume

Travail de l'élève **1. Construction d'un tétraèdre régulier en origamie**

1. Visionner le film de la construction d'un solide en origamie, sur le site de Bricomath.
2. Combien de faces possède le solide construit ? Quel est alors sa nature ?
3. Grâce à la série de schémas fournie ci-dessous, construire vous-même ce solide.
4. Conjecturer la nature des faces de ce solide (nous le démontrerons plus tard).
   On parle de tétraèdre régulier.
5. Construire deux patrons différents de tétraèdre régulier de côtés 4 cm.
6. Représenter un tétraèdre régulier en perspective cavalière.





La géométrie élémentaire de l'espace est née du souci d'étudier les propriétés de l'espace dans lequel nous vivons. Les objets élémentaires de cette géométrie sont les points, les droites et les plans. On considère ces notions comme suffisamment évidentes pour ne pas les définir ici.
Rappelons tout de même qu'un plan est représenté en général par un parallélogramme, censé représenter un rectangle en "perspective". Il ne s'agit là que d'une représentation de l'objet théorique "plan" qui n'a pas d'épaisseur et illimité dans toutes les directions (comme la droite est représentée par un segment).

En perspective cavalière :

1. Les segments visibles sont dessinés en traits pleins ; les autres sont dessinés en pointillés.
2. **Conservation de l'alignement et du parallélisme** :
   - Des points alignés sont représentés par des points alignés.
     Attention ! Des points alignés sur le dessin ne le sont pas forcément dans la réalité !
   - Deux droites de l'espace parallèles (dans un plan) sont représentées par deux droites parallèles.
   - Des droites concourantes (dans un plan) sont représentées par des droites concourantes.
     Attention ! Des droites concourantes sur le dessin ne le sont pas forcément dans la réalité !
3. **Conservation des proportions de distance** :
   - Le milieu d'un segment est représenté par le milieu du segment dessiné.
   - Dans un plan de face, une figure est représentée à l'échelle, dans les autres plans, les tailles sont réduites proportionnellement.
     Attention ! Les angles ne sont pas conservés (sauf dans le plan de face)

Remarque : Ainsi un rectangle pourra être représenté par un parallélogramme en perspective cavalière. L'énoncé et le codage seront donc importants pour comprendre une figure.

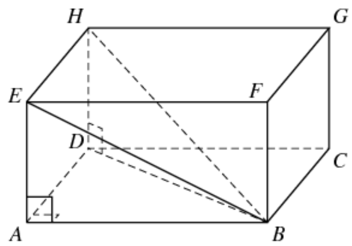
Exemples :

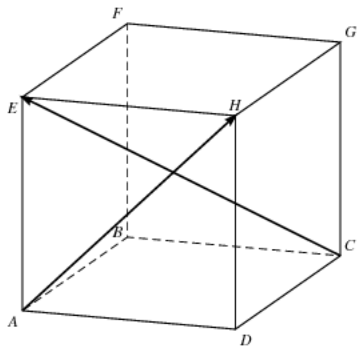
$ABCDEFGH$ est un pavé droit.

Les segments $[AD]$, $[HD]$ et $[DC]$, non visibles, ont été représentés en pointillés contrairement au segment $[AB]$.

Les droites (AB) est (DC) sont parallèles et sont représentées comme deux droites parallèles.

Notons que les droites (HD) et (BD) sont perpendiculaires mais ne sont pas représentées comme telles.

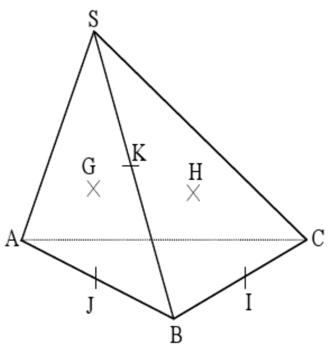




Dans ce deuxième exemple, $ABCDEFGH$ est un cube.

On peut observer que les droites non sécantes (EC) et (AH) se coupent pourtant sur le dessin.

De plus, aucune des arêtes perpendiculaires dans la réalité ne sont représentées comme telles, puisque le cube n'est pas observé « de face ».



Les points I, J et K sont les milieux respectifs des arêtes $[BC]$, $[AB]$ et $[SB]$.

Le point G est le centre de gravité du triangle SAB. Il est donc situé aux $\frac{2}{3}$ de la médiane $[SJ]$ en partant du sommet S. Les points S, J et G sont alignés.

De même H est le centre de gravité du triangle SBC. Il est situé aux $\frac{2}{3}$ de la médiane $[SI]$.

Les droites (AC) et (SB) ne sont pas concourantes dans l'espace, mais elles se coupent sur le dessin.

Exercices du livre :

n° 8 + 9 p 31

Les patrons

Un patron de solide est obtenu en plaçant toutes ses faces dans un même plan.

Remarques :

- Un même solide peut avoir plusieurs patrons possibles (non superposables).
- Certains solides n'ont pas de patrons : c'est le cas de la sphère.

Exemple :

Représenter deux patrons de pavé droit de dimensions 2 cm, 3 cm et 4 cm (cf p 290)

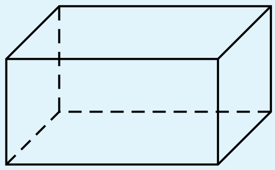
Exercices du livre :

n° 1 + 5 + 10 p 30

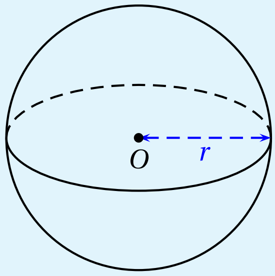
Quelques solides et leur volume (cf formulaire p 290-291)

Parallélpipède rectangle : $V =$ aire de la base $\times h$

$$V = L \times l \times h$$

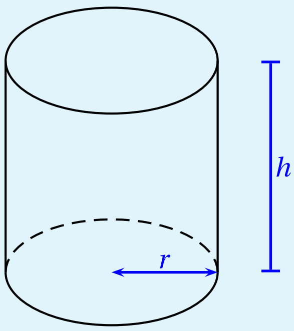


Sphère : $V = \frac{4}{3} \times \pi \times r^3$

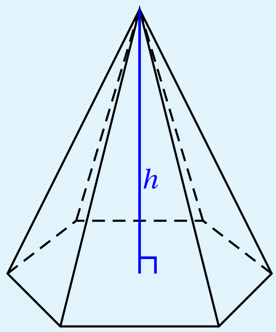


Cylindre de révolution : $V =$ aire de la base $\times h$

$$V = \pi \times r^2 \times h$$

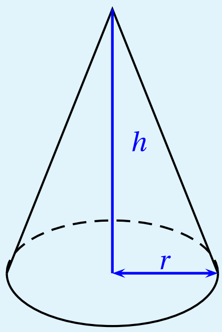


Pyramide : $V = \frac{1}{3} \times$ aire de la base $\times h$



Cône : $V = \frac{1}{3} \times$ aire de la base $\times h$

$$V = \frac{1}{3} \times \pi \times r^2 \times h$$



Propriété 1 :

Lorsque l'on multiplie par un nombre $k > 0$ les dimensions d'un solide, le volume du solide est multiplié par k^3.

Exercices du livre :

n°34 p 33

Exercice 1 **:**

On a écrit un algorithme à l'aide du logiciel Algobox. Voici ce qui a été saisi :

```
VARIABLES
  Rayon EST_DU_TYPE NOMBRE
  Hauteur EST_DU_TYPE NOMBRE
  Volume EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  AFFICHER "Entrer le rayon"
  LIRE Rayon
  AFFICHER "Entrer la hauteur"
  LIRE Hauteur
  Volume PREND_LA_VALEUR Math.PI*pow(Rayon,2)*Hauteur/3
  AFFICHER "Le Volume est égal à "
  AFFICHER Volume
FIN_ALGORITHME
```

1. Que fait cet algorithme ?

2. Quelles sont les variables en entrée ?

3. Quelles sont les variables en sortie ?

4. En s'inspirant de l'exercice précédent, écrire un algorithme affichant :

  a. Le volume d'une boule lorsque l'on saisit le rayon ;

  b. L'aire latérale totale d'un cylindre de révolution lorsque l'on saisit le rayon du disque de base et la hauteur.

I-2 Axiomes et premières propriétés

En mathématiques, le mot axiome désignait une proposition évidente en soi dans la tradition mathématique grecque, comme dans les Éléments d'Euclide. Aujourd'hui, on l'utilise en logique mathématique pour désigner une vérité première, à l'intérieur d'une théorie. L'ensemble des axiomes d'une théorie, appelé axiomatique, doit être non-contradictoire ; c'est sa seule contrainte. Un axiome ne peut être remis en cause à l'intérieur de cette théorie et représente donc plutôt un point de départ dans un système de logique.
L'axiomatique peut être choisie arbitrairement mais la pertinence d'une théorie en dépendra. En réalité, c'est de la non cohérence de son interprétation que vient la réfutation d'une théorie et, par voie de conséquence, de son axiomatique. L'axiome est donc à la logique mathématique, ce qu'est le postulat à la physique théorique.

Travail de l'élève **2.** Activité 2 partie 1 p 23 (visualiser le pavé comme une salle de classe).
Rajouter à l'oral un plan déterminé par deux droites et un par une droite et un point.

Axiomes d'incidences

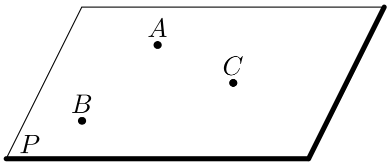
En géométrie dans l'espace, il s'agit des règles qui fournissent les relations entre les points, les droites et les plans.

– Deux points **non confondus** sont nécessaires et suffisent pour définir et nommer une droite.
– Trois points **non alignés** sont nécessaires et suffisent pour définir et nommer un plan.
– Si M et N sont deux points d'un plan $\mathscr{P}$, alors tous les points de la droite (MN) appartiennent à $\mathscr{P}$.

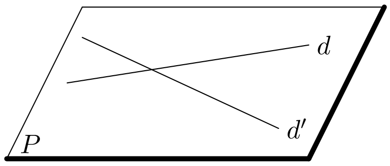
Remarques :

– On nomme un plan par trois points non alignés entre parenthèses (ceci permet de le différencier du triangle).
– Un plan peut donc être déterminé par l'une des conditions suivantes :

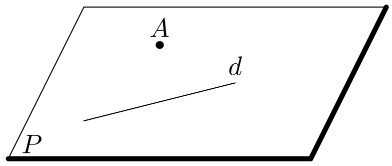
trois points non alignés



deux droites sécantes



une droite et un point extérieur à celle-ci



Définition 1 :
Quand des éléments de l'espace appartiennent à un même plan, on dit que ces éléments sont **coplanaires**.

Remarque : Deux ou trois points de l'espace sont toujours coplanaires (il existe toujours un plan passant par ces deux ou trois points).

Théorème 1 :
Lorsque tous les éléments d'un problème sont coplanaires, toutes les règles de la géométrie plane s'appliquent (Thalès, Pythagore ...)

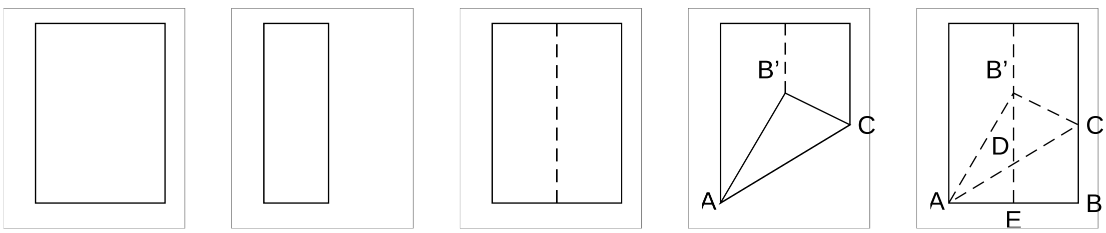
Remarque : Dans un problème de géométrie dans l'espace, on essaiera donc toujours de se placer dans un plan (que l'on prendra la peine de préciser) pour raisonner.

II) Rappel de la géométrie plane

II-1 Etude d'une face du tétraèdre construit en origamie

Travail de l'élève **3.** *Dans cette partie, nous allons démontrer que les faces obtenues lors de la construction du tétraèdre en origamie sont des triangles équilatéraux. On prendra soin de coder la figure au fur et à mesure.*

Rappels de la construction par des schémas :



1. **Utilisation d'une symétrie :**
   a. Grâce à la construction, que pouvez-vous dire sur B et B' ?
   b. Que pouvez-vous en déduire sur les mesures de :
      i. $[BD]$ et $[B'D]$?
      ii. $[BC]$ et $[B'C]$?
      iii. $\widehat{BDC}$ et $\widehat{B'DC}$?
      iv. $\widehat{BCD}$ et $\widehat{B'CD}$?
2. **Utilisation des angles formés par deux parallèles et une sécante :**
   a. Grâce à la construction, que pouvez-vous dire sur (BC) et $(B'D)$?
   b. Que pouvez-vous en déduire sur les mesures de $\widehat{BCD}$ et $\widehat{B'DC}$?
   c. Que pouvez-vous en déduire sur la nature du triangle $B'CD$.
3. **Utilisation de théorèmes dans le triangle ABC :**
   a. Expliquez pourquoi D est le milieu de $[AC]$.
   b. Que pouvez-vous en déduire sur les longueurs AD, DC et BD ?
4. Conclure sur la nature du triangle $B'CD$.

II-2 Quadrilatères

Définition 2 :
Un **parallélogramme** est un quadrilatère qui a ses côtés opposés deux à deux parallèles.

Propriété 2 :
- Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.
- Les côtés d'un parallélogramme sont deux à deux de même mesure.

Reconnaître un parallélogramme
$ABCD$ est un quadrilatère.

1. Si les côtés de $ABCD$ sont deux à deux parallèles alors $ABCD$ est un parallélogramme.
2. Si les diagonales de $ABCD$ se coupent en leur milieu, alors $ABCD$ est un parallélogramme.
3. Si $ABCD$ est un quadrilatère non croisé et que ses côtés sont deux à deux de même longueur, alors $ABCD$ est un parallélogramme.
4. Si $ABCD$ est un quadrilatère non croisé et qu'il a deux côtés opposés parallèles et de même longueur, alors $ABCD$ est un parallélogramme.

Définition 3 :
Un **rectangle** est un parallélogramme avec un angle droit.

Propriété 3 :
- Un rectangle possède donc les propriétés du parallélogramme.
- Les diagonales d'un rectangle sont de même longueur.
- Un rectangle possède 4 angles droits.

Définition 4 :
Un **losange** est un parallélogramme avec deux côtés consécutifs de même longueur.

Propriété 4 :
- Un losange possède donc les propriétés du parallélogramme.
- Les diagonales d'un losange sont perpendiculaires.
- Un losange possède quatre côtés de même mesure.

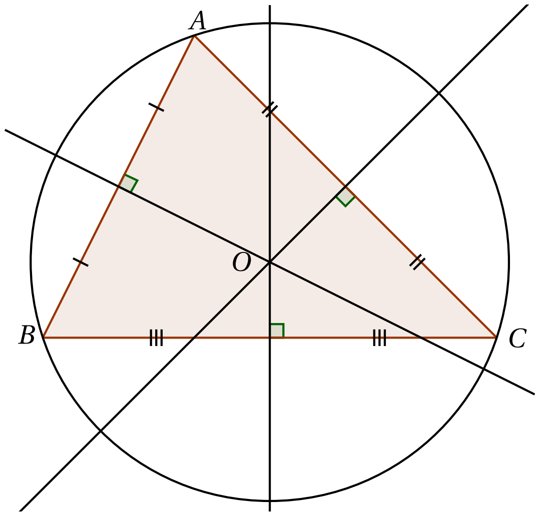
Définition 5 :
Un **carré** est un quadrilatère qui est à la fois un rectangle et un losange (donc un parallélogramme).

Propriété 5 :
Un carré possède donc les propriétés du parallélogramme, du rectangle et du losange.

Exemple :
Dessiner à la règle et au compas un quadrilatère quelconque, un parallélogramme, un rectangle, un losange et un carré.

II-3 Triangles

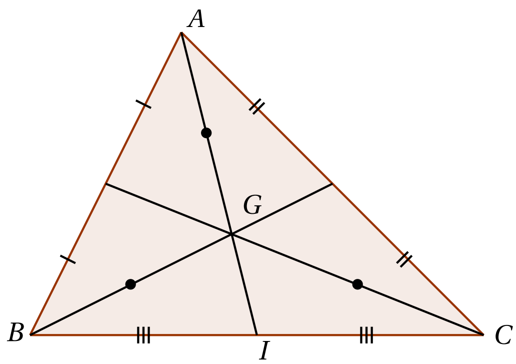
II-3.1 Droites remarquables du triangle



Définition 6 :
La **médiatrice** du segment $[AB]$ est la droite coupant ce segment perpendiculairement en son milieu.

Propriété 6 :
Les trois médiatrices des côtés d'un triangle sont concourantes en un point O qui est le **centre du cercle circonscrit** à ce triangle.

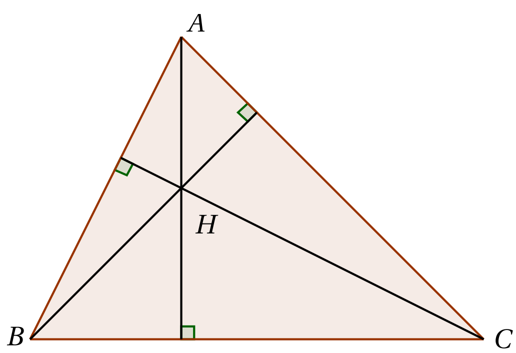
Remarques :
- La médiatrice d'un segment $[AB]$ est l'ensemble des points du plan équidistants de A et de B.
  Autrement dit, un point M appartient à la médiatrice de $[AB]$ si et seulement si $AM = MB$.
- Sur la figure ci-dessus, on en déduit que $OA = OB = OC$.
- Pour construire la médiatrice d'un segment $[AB]$ au compas, on construit un losange de *diagonale* $[AB]$ (on trouve ses deux autres sommets, il est inutile de tracer les côtés).
  La médiatrice de $[AB]$ est alors l'autre *diagonale* du losange.



Définition 7 :
Dans un triangle ABC, la **médiane** issue du sommet A est la droite passant par A et par le milieu I du côté opposé $[BC]$.

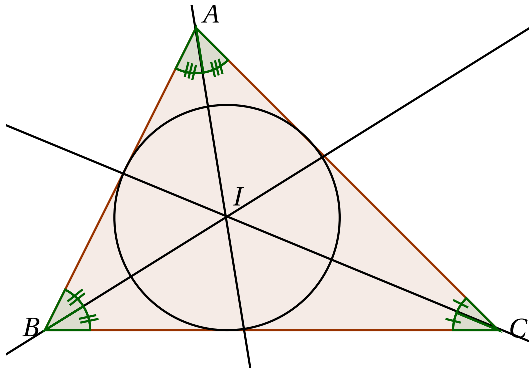
Propriété 7 :
Les trois médianes d'un triangle sont concourantes en un point G appelé **le centre de gravité** du triangle.

Remarques :
- G se trouve aux deux tiers de la médiane $[AA']$ en partant de A : $AG = \frac{2}{3}AA'$.
- Pour construire le milieu d'un segment $[AB]$ au compas, on construit en fait la médiatrice de $[AB]$ au compas, comme indiqué si dessus (inutile de la tracer, on ne demande que le milieu de $[AB]$).



Définition 8 :
Dans un triangle ABC, la **hauteur** issue de A est la droite passant par A et perpendiculaire au côté opposé $[BC]$.

Propriété 8 :
Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point H appelé **l'orthocentre** du triangle.



Définition 9 :
La **bissectrice** d'un angle est la droite qui partage cet angle en deux angles égaux.

Propriété 9 :
Les trois bissectrices sont concourantes en un point I qui est le **centre du cercle inscrit** dans le triangle.

Remarque : Pour construire la bissectrice d'un angle $\widehat{ABC}$, on construit en fait un losange de *côtés* $[AB]$ et $[BC]$ (on trouve son dernier sommet, il est inutile de tracer ses côtés). La bissectrice de $\widehat{ABC}$ est la *diagonale* du losange passant par B.

Théorème 2 :
Dans un triangle ABC isocèle en A, les droites remarquables du triangle issue de A sont confondues.

II-3.2 Le triangle rectangle

Propriété 10 :
Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est le côté opposé à l'angle droit.
Il s'agit du plus grand côté du triangle.

Remarque : Tant que l'on n'a pas prouvé qu'un triangle est rectangle (ou que ce n'est pas dit dans l'énoncé), on ne peut pas parler d'hypoténuse.

Théorème 3 :
Dans un triangle rectangle, le milieu de l'hypoténuse est le centre du cercle circonscrit au triangle (c'est donc aussi le point de concours des médiatrices).
On peut donc en déduire que dans un triangle ABC rectangle en A avec O le milieu de $[BC]$ on a

$$OA = OB = OC$$

Réciproque : Un triangle inscrit dans un demi-cercle avec pour côté un diamètre de ce cercle est un triangle rectangle (d'hypoténuse ce diamètre).

Faire une figure illustrant ce théorème.

Théorème 4 : *Pythagore (-580 à -500)*
Si ABC est un triangle rectangle en A alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$.
Réciproque : Si dans un triangle ABC on a $BC^2 = AB^2 + AC^2$, alors le triangle ABC est rectangle en A.
Contraposée : Si dans un triangle ABC on a $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$, alors le triangle ABC n'est pas rectangle en A.

Définition 10 : *Trigonométrie*
Si ABC est un triangle *rectangle* en A alors :

$$\cos \hat{B} = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{BA}{BC} \qquad \sin \hat{B} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{CA}{CB} \qquad \tan \hat{B} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{CA}{BA}$$

II-3.3 Triangles « proportionnels »

Théorème 5 : *des milieux*

– La droite passant par les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté de ce triangle.
– Si une droite passe par le milieu d'un côté d'un triangle et est parallèle à un autre côté alors elle passe par le milieu du troisième côté du triangle.

Théorème 6 : *Thalès* (*−627 à −547*)

Soit ABC un triangle et M et N deux points appartenant respectivement aux droites (AB) et (AC), distincts de A.
Si les droites (BC) et (MN) sont parallèles alors $\dfrac{AB}{AM} = \dfrac{AC}{AN} = \dfrac{BC}{MN}$.
Réciproque : Si $\dfrac{AB}{AM} = \dfrac{AC}{AN}$ et si les points A, B, M et A, C, N sont alignés dans le même ordre alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

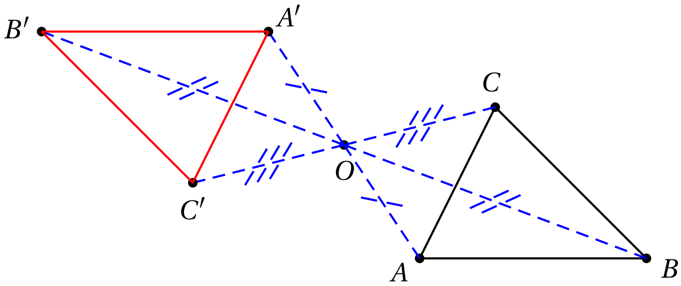
II-4 Symétries

Définition 11 :

M' est l'image du point M par la **symétrie de centre** O signifie que O est le milieu de $[MM']$.

Propriété 11 :

La symétrie centrale conserve :
– l'alignement,
– les longueurs,
– le parallélisme,
– les angles géométriques et orientés.

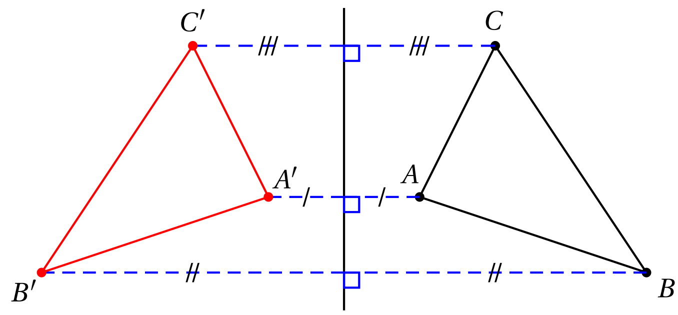


Définition 12 :

M' est l'image du point M par la **symétrie d'axe** Δ signifie que la droite Δ est la médiatrice du segment $[MM']$.

Propriété 12 :

La symétrie axiale conserve :
– l'alignement,
– les longueurs,
– le parallélisme,
– les angles géométriques.
Par contre, elle inverse les angles orientés.



Exemple :

Suite de l'activité : Etude du tétraèdre

On appelle $\mathscr{T}$ le tétraèdre construit comme précédemment dans une feuille de dimension 18×25.
On aimerait connaître son volume.

1. **a.** Par construction, que vaut la hauteur h d'une des faces ?
   b. En déduire la longueur a des arêtes de $\mathscr{T}$.
   c. Calculer l'aire d'une face de $\mathscr{T}$.
2. **a.** Représenter en perspective cavalière le solide $\mathscr{T}$.
   Appeller IJK la face au sol et L le sommet opposé. Placer le centre de gravité G de IJK.
   b. Déterminer la longueur IG.
   c. *On admet que le triangle LGI est rectangle en G.*
   Calculer la hauteur LG du tétraèdre.
3. En déduire le volume du tétraèdre.
4. Duplication du tétraèdre :
   a. En assemblant plusieurs des tétraèdres construits précédemment, construire un nouveau tétraèdre aux dimensions doublées.
   b. Quelle est la forme du « trou » au coeur du nouveau tétraèdre ?
   c. Quelle est le volume du trou ?

Remarques :

- « Etant donnée un carré, construire un carré d'aire double. »
  Selon Platon, Socrate aurait proposé ce problème à un esclace afin de démontrer que la connaissance est en chacun de nous.
- On raconte que pour enrayer une épidémie de peste qui décimait Athènes, les habitants de l'île de Délos décidèrent de doubler le volume de l'autel dédié à Apollon. Ce n'est qu'au XIX^e siècle que l'on a démontré que cette construction était impossible à la règle non graduée et au compas !

Exercices du livre :

n° 6-7 p 30 + 28 - 29 - 30 - 32 - 33 p 33

III) Positions relatives

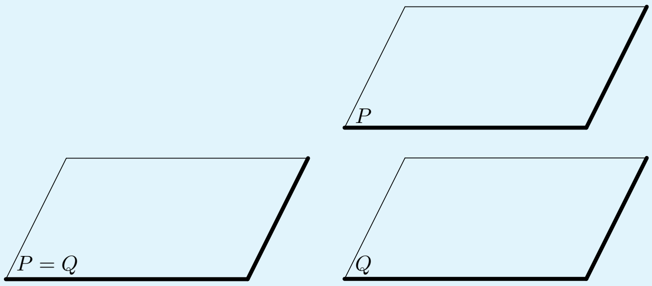
Travail de l'élève **4.** *Repérer autour de nous*

1. Combien de pieds faut-il au minimum pour qu'une chaise soit stable ?
2. Repérer dans la salle de classe :
   a. Des plans qui sont parallèles ;
   b. Des plans qui se coupent. Quelle semble être leur intersection ?
   c. Des droites parallèles et des droites sécantes ;
   d. Des droites qui ne semblent ni parallèles ni sécantes.

De deux plans

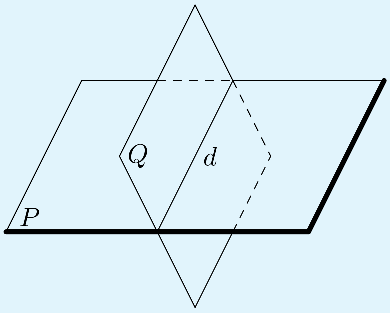
Soient P et Q sont deux plans de l'espace. Il n'existe que trois possibilités :

1. Les plans sont parallèles (confondus ou strictement).



parallèles confondus parallèles strictement

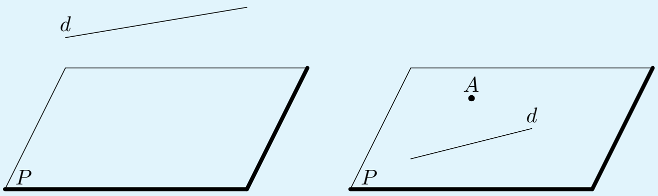
2. Les plans ont un point commun A et sont distincts. Alors ils sont sécants suivant une droite passant par A.
   Ainsi deux plans distincts qui ont deux points communs A et B sont sécants suivant la droite (AB)



Une droite et un plan

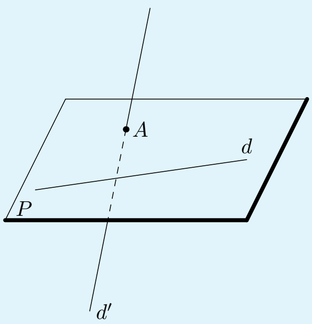
Soient d est une droite et P un plan de l'espace. Il n'existe que trois possibilités :

1. La droite est parallèle à une droite de ce plan (éventuellement elle-même). Alors la droite est parallèle au plan.



parallèle strictement droites incluses dans le plan

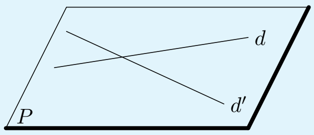
2. La droite et le plan ne sont pas parallèles. Ils n'ont qu'un point commun et sont dits sécants,



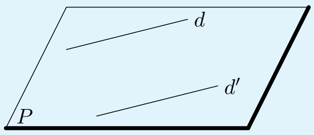
Deux droites

Soient d et d' deux droites de l'espace. Il n'existe que trois possibilités :

1. Il existe un plan contenant ces deux droites, elles sont dites coplanaires.
Elles sont alors soit sécantes ou soit parallèles (strictement ou confondues) dans ce plan.

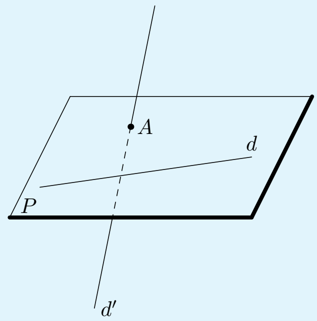


deux droites sécantes



deux droites parallèles

2. Il n'existe aucun plan contenant ces deux droites, elles sont dites non coplanaires (et elles non pas de points commun !)



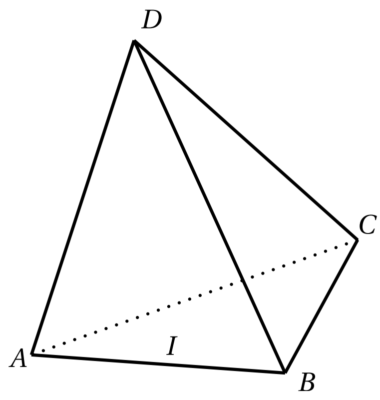
Remarque : Dans l'espace,
- Deux droites sans points commun ne sont pas forcément parallèles ! Elles peuvent être non coplanaires.
- Deux droites qui ne sont pas parallèles n'ont pas toujours de point commun ! Elles peuvent être non coplanaires.
- Un plan est entièrement déterminer par deux droites sécantes.
- Un plan est entièrement déterminer par deux droites strictement parallèles.

Exercice 2 :

$ABCD$ est un tétraèdre et I est le milieu de $[AB]$.
Compléter les phrases mathématiques suivantes à l'aide des symboles

$$\subset, \quad \in, \quad \notin, \quad \not\subset$$

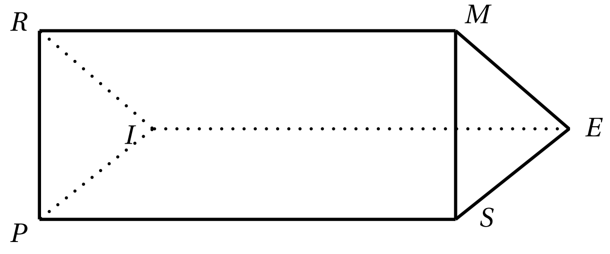
1. $I \dots (AB)$
2. $B \dots (CDI)$
3. $(CI) \dots (ABC)$
4. $D \dots (BI)$
5. $(AB) \dots (CBA)$
6. $(DI) \dots (BCI)$
7. $B \dots (ADI)$
8. $B \dots (IA)$



Exercice 3 :

PRISME est un prisme droit à base triangulaire.
Déterminer les positions relatives :

1. des droites (RE) et (MI).
2. des droites (PI) et (EM).
3. de la droite (EM) et du plan (IPS).
4. de la droite (SR) et du plan (PMR).
5. du plan (IRP) et du plan (IEM).



Exercice 4 :

$ABCDE$ est une pyramide, dont la base $BCDE$ est un quadrilatère tel que (BC) et (DE) ne sont pas parallèles.

I est le milieu de $[AB]$ et J celui de $[AC]$. K est le point du segment $[AD]$ tel que $AK = \frac{3}{4}AD$.

1. Déterminer la position relative :
   a. des droites (IJ) et (BC)
   b. des droites(JK) et (CD)
2. Déterminer l'intersection :
   a. de la droite (JK) et du plan (BCD)
   b. des plans (ABC) et (ADE).

Exercices du livre :

n° 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 p 31

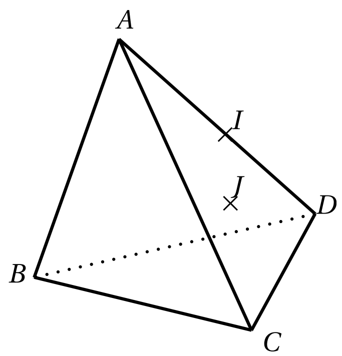
Application : section d'un solide par un plan

Pour tracer la section d'un solide par un plan, il faut déterminer et tracer les intersections de ce plan avec toutes les faces du solide.

Exemple :

Soit $ABCD$ un tétraèdre. Le point I est le milieu de $[AD]$. Le point J est sur la face ACD tel que (IJ) ne soit pas parallèle à (AC).

Tracer la section du tétraèdre $ABCD$ par le plan (IJB).



***Solution* :**

I et J sont deux points du plan (ACD), par conséquent :

$$(IJ) \subset (ACD)$$

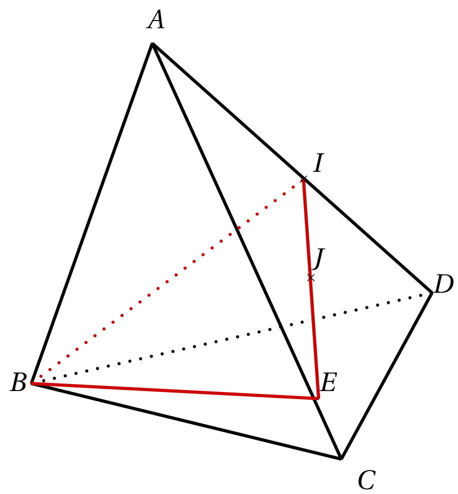
. Comme $B \notin (ACD)$ les plans (IJB) et (ACD) ne sont pas confondus, comme I est commun aux deux plans, leur intersection est une droite : il s'agit de la droite

$$(IJ)$$

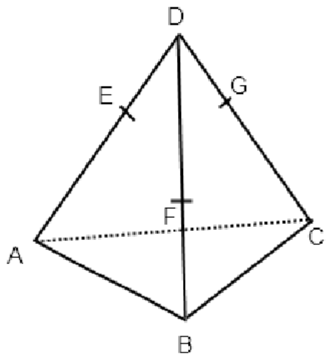
La trace du plan (IJB) sur la face ACD est donc le segment $[IE]$ (où E est le point d'intersection des droites (IJ) et (AC), tracée ci-dessous en rouge.

On démontre de la même manière que la trace du plan (IJB) sur la face ABD est le segment $[BE]$, puis que la trace du plan (IJB) sur la face ABD est le segment $[BI]$.

Ainsi la section du tétraèdre $ABCD$ par le plan (IJB) est le triangle BIE, en rouge sur le schéma suivant :



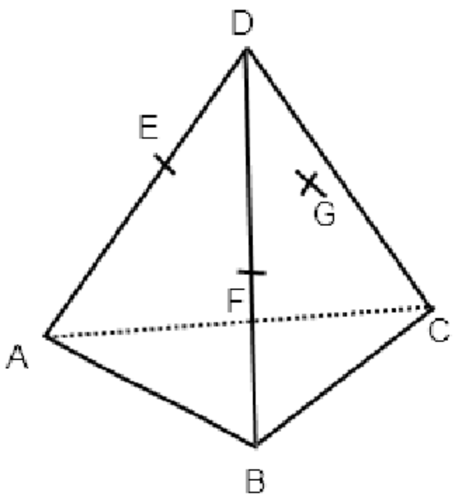
Exercice 5 :



On considère le tétraèdre $ABCD$ et E, F, G trois points tels que $E \in [AD]$, $F \in [BD]$ et $G \in [CD]$, comme sur la figure ci-dessus.
Nous allons chercher à dessiner l'intersection du plan (EFG) avec chacune des faces du tétraèdre.

1. Quelle est l'intersection de la face ABD et du plan (EFG) ?
2. Quelle est l'intersection de la face BCD et du plan (EFG) ?
3. Quelle est l'intersection de la face ACD et du plan (EFG) ?
4. Quelle sont les positions relatives des droites :
   – (EF) et (AB) ?
   – (GF) et (CB) ?
5. En notant I l'intersection entre (EF) et (AB) et J celle entre (GF) et (CB), expliquer pouquoi la droite d'intersection entre les plans (EFG) et (ABC) est la droite (IJ) ?

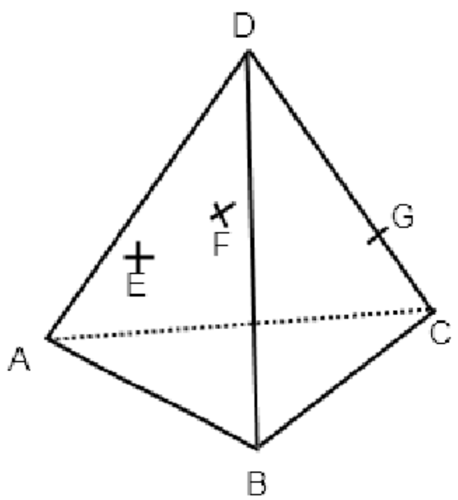
Exercice 6 :



On considère le tétraèdre $ABCD$ et E, F, G trois points tels que $E \in [AD]$, $F \in [BD]$ et $G \in (BCD)$, comme sur la figure ci-contre.
Nous allons chercher à dessiner l'intersection du plan (EFG) avec chacune des faces du tétraèdre $ABCD$.

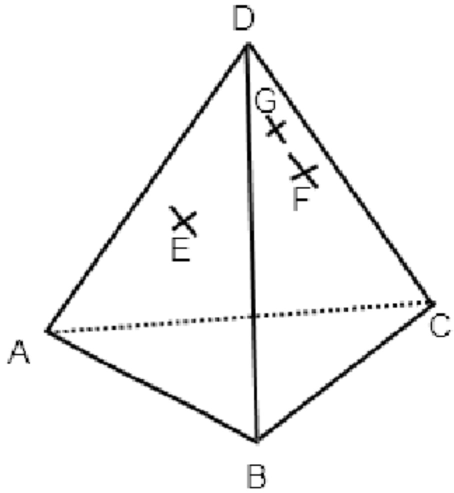
1. Quelle est l'intersection de la face ABD et du plan (EFG) ?
2. Quelle est l'intersection de la face BCD et du plan (EFG) ? (Créer un point si besoin)
3. Quelle est l'intersection de la face ACD et du plan (EFG) ?

Exercice 7 :



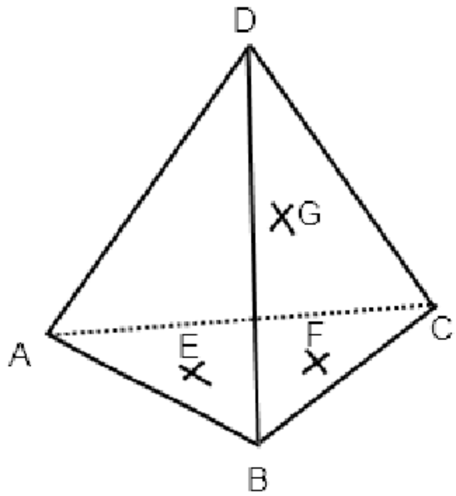
On considère le tétraèdre $ABCD$ et E, F, G trois points tels que E et F sont dans (ABD) et $G \in [CD]$, comme sur la figure ci-contre.
Dessiner la section du tétraèdre par le plan (EFG).

Exercice 8 :



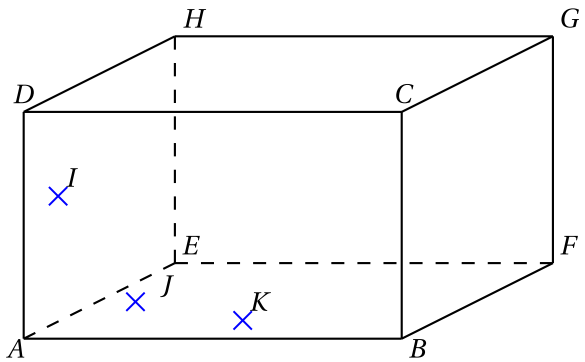
On considère le tétraèdre $ABCD$ et E, F, G trois points tels que E et F sont dans (ACD) et $G \in (BCD)$, comme sur la figure ci-contre.
Dessiner la section du tétraèdre par le plan (EFG).

Exercice 9 :



On considère le tétraèdre $ABCD$ et E, F, G trois points tels que E et F sont dans (ABC) et $G \in (BCD)$, comme sur la figure ci-contre.
Dessiner la section du tétraèdre par le plan (EFG).

Exercice 10 :



On considère le parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$ et les points I, J, K tels que J et K sont dans (ABE) et $I \in (ADE)$, comme sur la figure ci-contre.
Dessiner la section du parallélépipède par le plan (IJK).

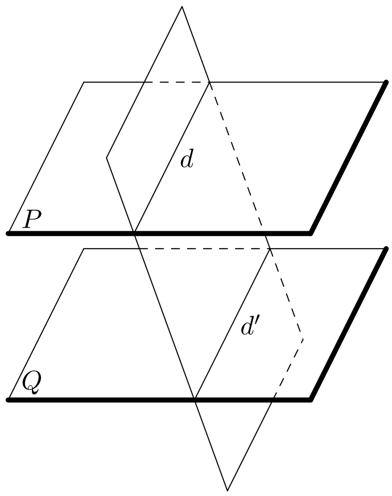
IV) Parallélisme dans l'espace

La liste des propriétés n'est pas exhaustive…certaines propriétés "évidentes" concernant le parallélisme dans l'espace n'apparaissent pas dans cette section.

IV-1 Parallélisme entre droites

Théorème 7 :
Deux droites parallèles à une même troisième droite sont parallèles entre elles.

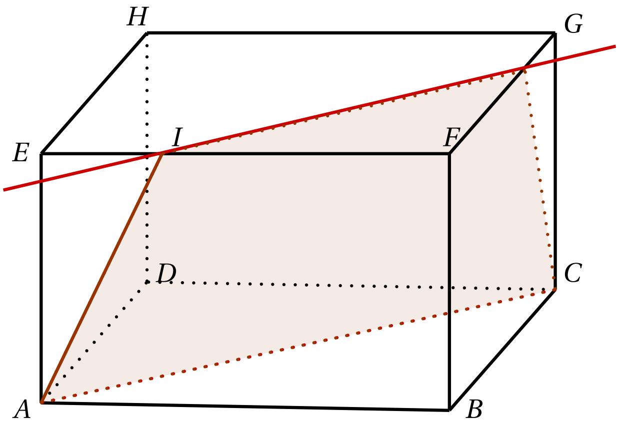
Théorème 8 :
Si P et Q sont deux plans parallèles, alors tout plan qui coupe P coupe aussi Q et les droites d'intersection sont parallèles.



Preuve
Soient D_1 et D_2 les droites d'intersection. Elles sont coplanaires, donc soit parallèles, soit sécantes. Or si elles sont sécantes en un point M alors M appartient à $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$, ce qui est absurbde. Donc elles sont strictement parallèles.

Exemple :
Soit $ABCDEFGH$ un pavé droit. Soit I un point de $[EF]$. Déterminer et tracer l'intersection des plans (EFG) et (ACI).

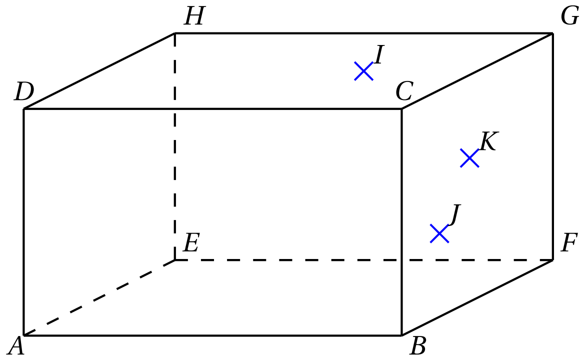
Solution :
Les plans (ABC) et (EFG), qui contiennent les faces $ABCD$ et $AFGH$ du pavé, sont parallèles.
$I \in (ACI)$, mais $I \notin (ABC)$, donc les plans (ACI) et (ABC) ne sont pas confondus. Comme A et C sont deux points communs aux plans (ACI) et (ABC), on peut conclure que les plans (ABC) et (ACI) sont sécants selon la droite (AC).
On a donc $(ABC)//(EFG)$ et $(ACI)\cap(ABC) = (AC)$.
On en déduit que le plan (ACI) coupe également le plan (EFG), selon une droite parallèle à (AC).
L'intersection de ces deux plans est donc la droite parallèle à (AC) passant par I.



Remarque : L'intersection se note à l'aide du symbole $\cap$. Ainsi si la droite d est l'intersection des plans P et Q, on note :

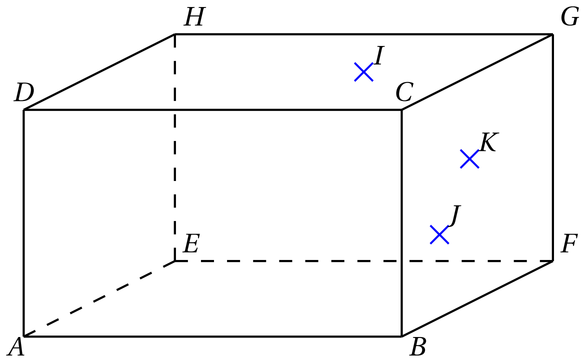
$$d = P \cap Q$$

Exercice 11 :



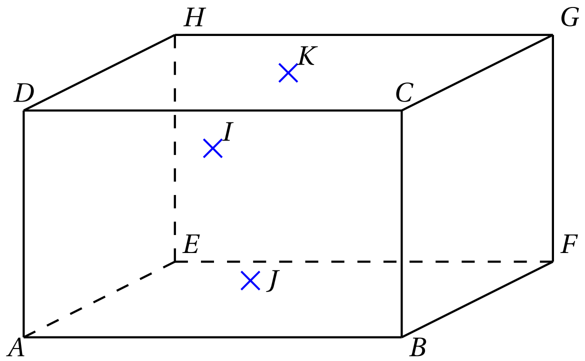
On considère le parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$ et les points I, J, K tels que J et K sont dans (BFG) et $I \in (CDH)$, comme sur la figure ci-contre.
Dessiner la section du parallélépipède par le plan (IJK).

Exercice 12 :



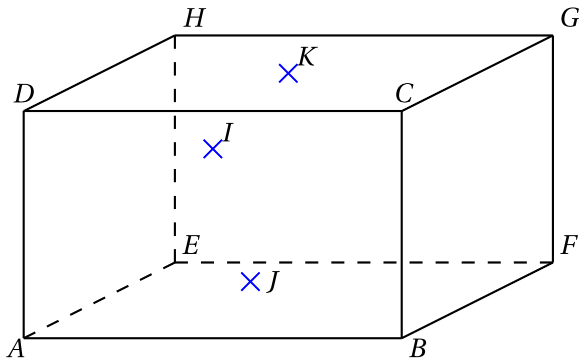
On considère le parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$ et les points I, J, K tels que J et K sont dans (EFG) et $I \in (CDH)$, comme sur la figure ci-contre.
Dessiner la section du parallélépipède par le plan (IJK).

Exercice 13 :



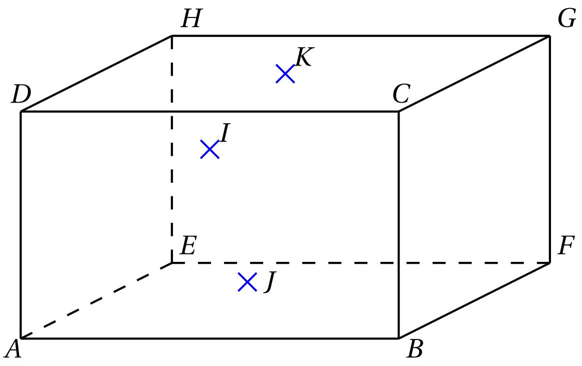
On considère le parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$ et les points I, J, K tels que I et J sont dans (ABC) et $K \in (DCG)$, comme sur la figure ci-contre.
Dessiner la section du parallélépipède par le plan (IJK).

Exercice 14 :



On considère le parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$ et les points I, J, K tels que I et J sont dans (ABC) et $K \in (EFG)$, comme sur la figure ci-contre.
Dessiner la section du parallélépipède par le plan (IJK).

Exercice 15 : Pour les experts



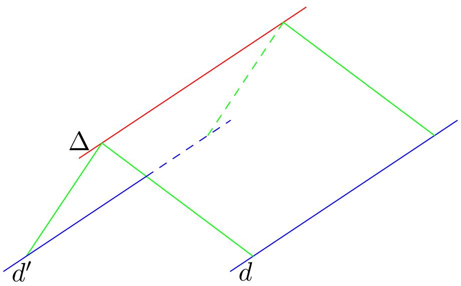
On considère le parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$ et les points I, J, K tels que I et K sont dans (EFG) et $K \in (ABF)$, comme sur la figure ci-contre.

Dessiner la section du parallélépipède par le plan (IJK).

Théorème 9 : *Théorème du toit*

d et d' sont deux droites parallèles. P est un plan contenant d et P' un plan contenant d'.

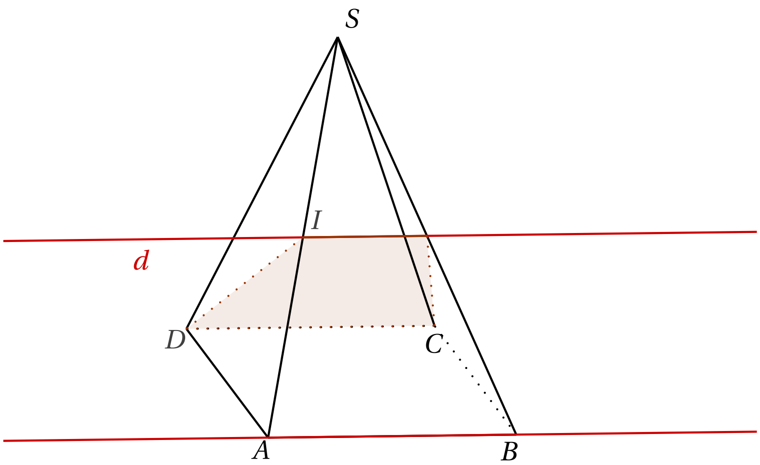
Si, en outre, les plans P et P' sont sécants, alors la droite Δ d'intersection de ces plans est parallèle à d et d'.



Exemple :

Soit $SABCD$ une pyramide régulière de sommet S à base carrée. Soit I le milieu de l'arête $[SA]$. Le plan (CDI) coupe le plan (SAB) selon une droite d.

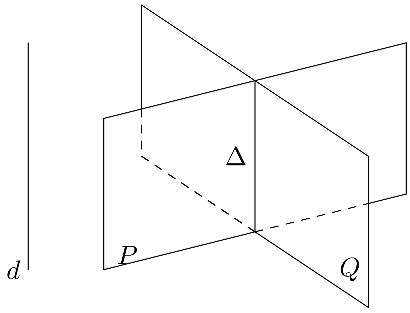
Démontrer que d est parallèle à (AB).



Solution :

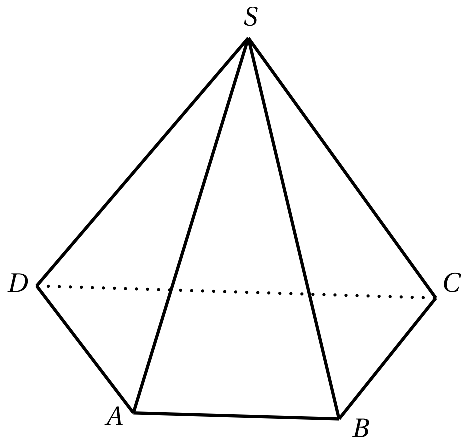
Les plans (CDI) et (SAB) sont sécants selon la droite d. Or le plan (CDI) contient la droite (CD) et le plan (SAB) contient la droite (AB), et les deux droites (AB) et (CD) sont parallèles (comme supports des côtés du carré de base de la pyramide). D'après le théorème du toit, la droite d est donc parallèle à la droite (AB).

Corollaire 1 :
Si une droite est parallèle à deux plans sécants alors elle est parallèle à leur droite d'intersection.



Exercice 16 :

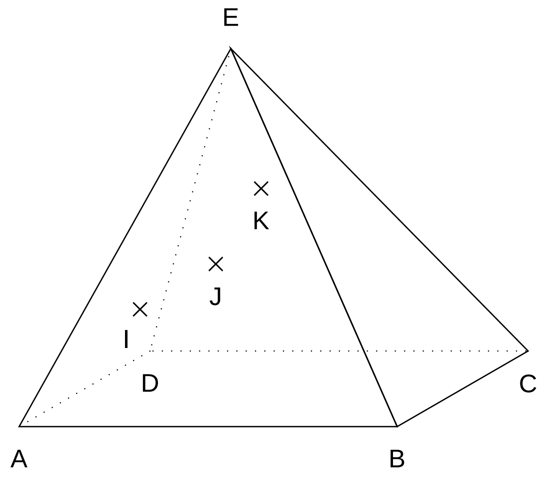
$SABCD$ est une pyramide dont la base $ABCD$ est un trapèze tel que $(AB)//(CD)$.
Démontrer que la droite (CD) est parallèle au plan (SAB).



Exercice 17 :

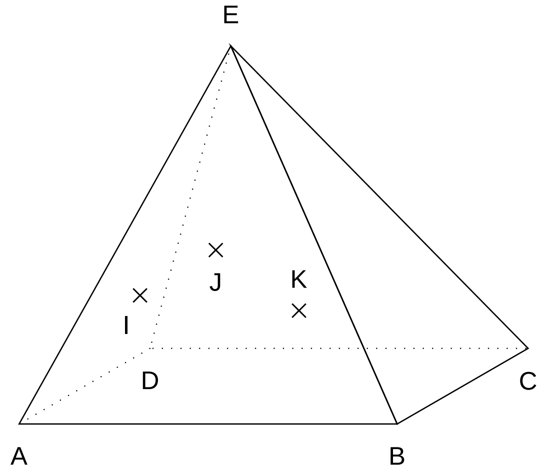
On considère une pyramide de base $ABCD$ et de sommet principal E, et I et J deux points de la face ABE et K un point de la face CDE, comme sur la figure ci-contre.
On se propose de tracer l'intersection de (IJK) et de $(ABCDE)$.

1. Pouvez-vous le faire sans indication supplémentaire ?
2. a. Caractériser l'intersection (Δ) des plans (ABE) et (CDE).
   La tracer.
   b. Placer $L = (IJ) \cap (\Delta)$. Donner trois plans auxquels L appartient.
   c. En déduire $(IJK) \cap (CDE)$.
3. Tracer l'intersection de (IJK) et de la pyramide.



Exercice 18 : Pour les experts

On considère une pyramide de base $ABCD$ et de sommet principal E, et I et J deux points de la face ABE et K un point de la face CDE, comme sur la figure ci-contre.
On se propose de tracer l'intersection de (IJK) et de $(ABCDE)$.



1. Pouvez-vous le faire sans indication supplémentaire ?
2. **a.** Caractériser l'intersection (Δ) des plans (ABE) et (CDE).
   La tracer.
   b. Placer $L = (IJ) \cap (\Delta)$. Donner trois plans auxquels L appartient.
   c. En déduire $(IJK) \cap (CDE)$. La tracer
3. **a.** Placer $M = (IJ) \cap (ABC)$.
   b. En déduire $(IJK) \cap (ABC)$.
4. Tracer l'intersection de (IJK) et de la pyramide.

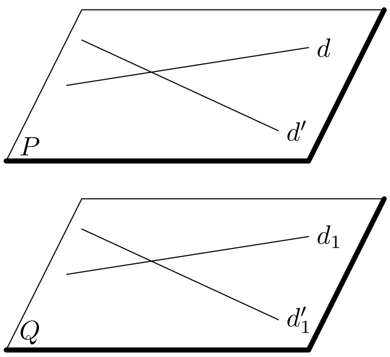
Exercices du livre :

n° 22 + 23 + 24 p 32

IV-2 Parallélisme entre plans

Théorème 10 :
Deux plans parallèles à un même troisième plan sont parallèles entre eux.

Théorème 11 :
Si deux droites sécantes d'un plan P sont respectivement parallèles à deux droites sécantes d'un plan Q, alors les plans P et Q sont parallèles.

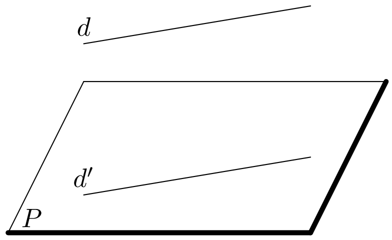


Exercices du livre :

n° 25 + 26 p 32

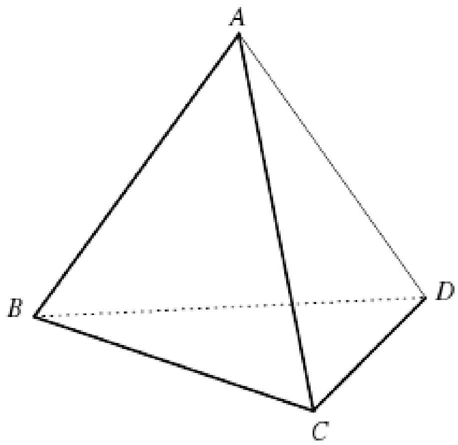
IV-3 Parallélisme entre droites et plans

Théorème 12 :
Si une droite d est parallèle à une droite d', alors la droite d est parallèle à tout plan P contenant la droite d'.



Exemple :
Soient $ABCD$ un tétraèdre et I, J, K, M et N les milieux respectifs de $[AB]$, $[AC]$, $[AD]$, $[BD]$ et $[CD]$.

1. Déterminer l'intersection des plans (ABC) et (IJK).
2. Déterminer les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ d'intersection des plans (ACM) et (BCD) puis (ACM) et (IJK).
3. Démontrer que les droites (IJ) et (MN) sont parallèles.
4. Démontrer que les droites $\mathscr{D}_1 // \mathscr{D}_2$.
5. Démontrer que la droite (IJ) est parallèle au plan (BCD).
6. Démontrer que les plans (IJK) et (BCD) sont parallèles.



Exercices du livre :
n° 27 p 32

V) Informatique

V-1 Algobox

Exercice 19 **:**
On a écrit un algorithme à l'aide du logiciel Algobox. Voici ce qui a été saisi :

```
VARIABLES
  Rayon EST_DU_TYPE NOMBRE
  Hauteur EST_DU_TYPE NOMBRE
  Volume EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  AFFICHER "Entrer le rayon"
  LIRE Rayon
  AFFICHER "Entrer la hauteur"
  LIRE Hauteur
  Volume PREND_LA_VALEUR Math.PI*pow(Rayon,2)*Hauteur/3
  AFFICHER "Le Volume est égal à "
  AFFICHER Volume
FIN_ALGORITHME
```

1. Que fait cet algorithme ?

2. Quelles sont les variables en entrée ?
3. Quelles sont les variables en sortie ?
4. En s'inspirant de l'exercice précédent, écrire un algorithme affichant :
   a. Le volume d'une boule lorsque l'on saisit le rayon ;
   b. L'aire latérale totale d'un cylindre de révolution lorsque l'on saisit le rayon du disque de base et la hauteur.

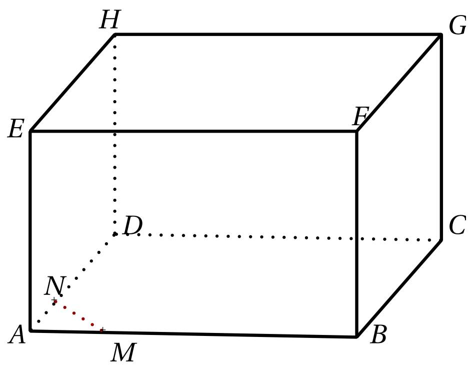
V-2 TP : Géogébra

Exercice 20 :

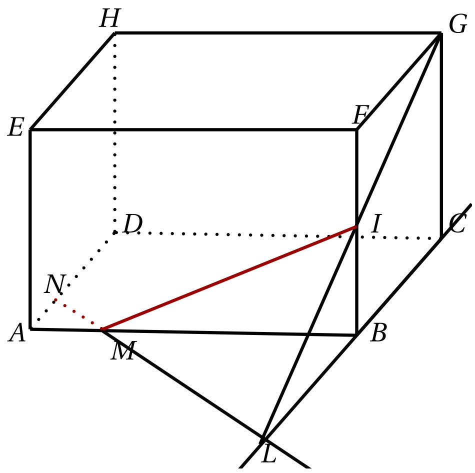
Soit $ABCDEFGH$ un pavé droit. Soit N et M deux points respectivement situés sur les arêtes $[AD]$ et $[AB]$. Tracer la section du pavé $ABCDEFGH$ par le plan (MNG) à l'aide du logiciel géogébra.

Voici les différentes étapes :

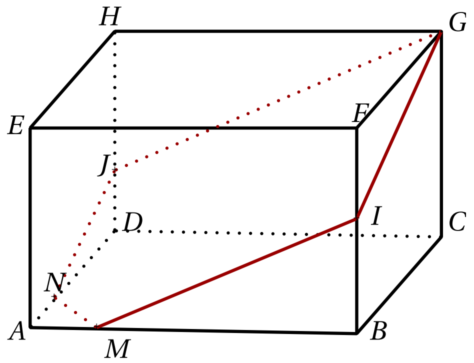
1. **Trace du plan (MNG) sur la face $ABCD$**
   M et N sont deux points communs aux plans (ABC) et (MGN).
   L'intersection de ces deux plans est donc la droite (MN), et la trace du plan (MGN) sur la face $ABCD$ est donc le segment $[MN]$. (en pointillés rouge sur la figure).



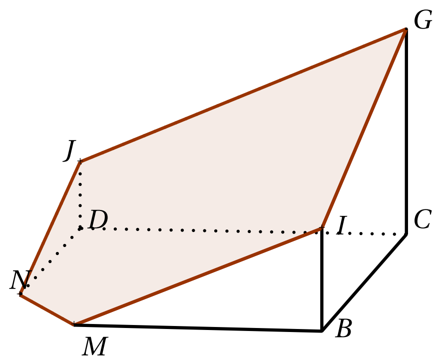
2. **Trace du plan (MNG) sur les faces $BCGF$ et $ABFE$.**
   Le point G est commun aux plans (MNG) et (BCG). Il suffit de trouver un second point commun aux deux plans.
   $(MN) \subset (MGN)$ et $(BG) \subset (BCG)$ donc le point d'intersection de (MN) et (BC) appartient à la fois aux plans (MNG) et $(BCG$. Appelons L ce point. On en déduit que l'intersection des plans (MNG) et (BCG) est la droite (GL).
   Soit I le point d'intersection de (GL) et (BF) : les segments $[GI]$ et $[MI]$ sont les traces du plan (MNG) sur les faces $BCGF$ et $ABFE$ respectivement (en traits pleins rouge sur la figure).



3. **Traces du plan (MNG) sur les faces $CGHD$ et $ADHE$**
   Les plans (ADH) et (BCG) sont parallèles. Le plan (MGN) coupe le plan (BCG) selon la droite (GI). On en déduit que (MGN) coupe (ADH) selon une droite parallèle à (GI).
   $N \in [AD] \subset (ADH)$ donc $N \in (ADH)$.
   De plus, par définition $N \in (MGN)$. N appartient donc à l'intersection des plans (MGN) et (ADH).
   On en déduit que l'intersection de ces deux plans est la droite parallèle à (GI) passant par N.
   Cette droite coupe l'arête $[DH]$ en un point J : les segments $[NJ]$ et $[JG]$ sont donc les traces du plan (MNG) sur les faces $ADHE$ et $CGHD$ respectivement (en traits pointillés rouge sur la figure).



4. **Section du pavé $ABCDEFGH$ par le plan (MGN).**
   La section du pavé par le plan (MGN) est donc le pentagone $MIGJN$.



VI) Quelques exercices d'applications

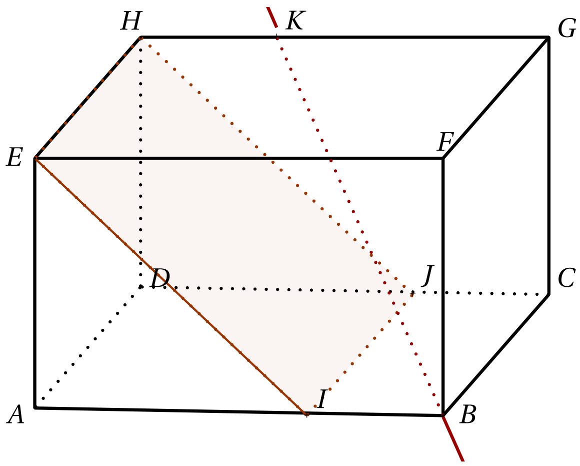
VI-1 Démontrer qu'une droite est parallèle à un plan

Exercice 21 :

Dans un pavé droit $ABCDEFGH$, on place les points I, J et K respectivement sur les arêtes $[AB]$, $[CD]$ et $[GH]$ tels que :

$$BC = CJ = HK$$

1. De quelle nature est le quadrilatère $IBKH$?
2. Que peut-on dire des droites (BK) et (IH) ?
3. En déduire que la droite (BK) est parallèle au plan (HIJ).



Solution :

1. Comme $HK = IB$ et comme $(HK)//(IB)$ le quadrilatère $IBKH$ a deux côtés parallèles et de même longueur : c'est un parallélogramme.
2. $IBKH$ est un parallélogramme, donc $(KB)//(IH)$.
3. (KB) est parallèle à une droite du plan (HIJ), elle est donc parallèle au plan (HIJ).

Exercice 22 :

Soit $ABCDEFGH$ un cube. Soit I et J les points situés respectivement sur $[AB]$ et sur $[AH]$ tels que :

$$AI = \frac{1}{4}AB \qquad \text{et} \qquad AJ = \frac{1}{4}AH$$

Démontrer que $(IJ)//(BFH)$

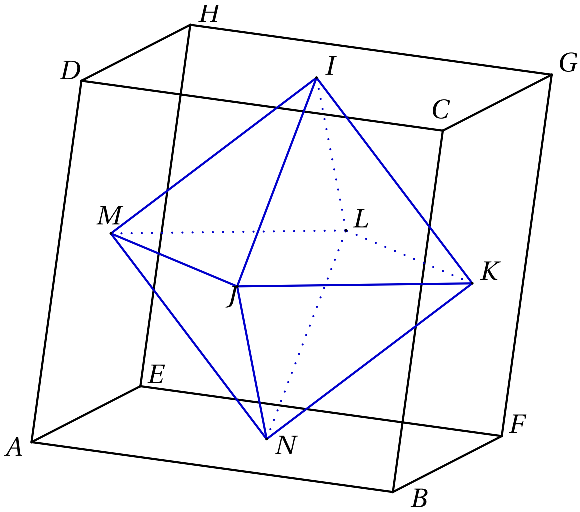
VI-2 Démontrer que des plans sont parallèles.

Exercice 23 :

Soit $ABCDEFGH$ un cube.

Soit I, J, K, L, M et N les centres respectifs des face du cube (voir ci-dessous). Le solide $IJKLMN$ est un octaèdre régulier (toutes ses faces sont des triangles équilatéraux). On veut démontrer que les faces opposées de l'octaèdre sont parallèles.

1. Démontrer que la droite (IK) est parallèle à la droite (HC).
2. Démontrer que la droite (IK) est parallèle à la droite (MN).
3. Démontrer que les plans (IKL) et $JMN)$ sont parallèles.



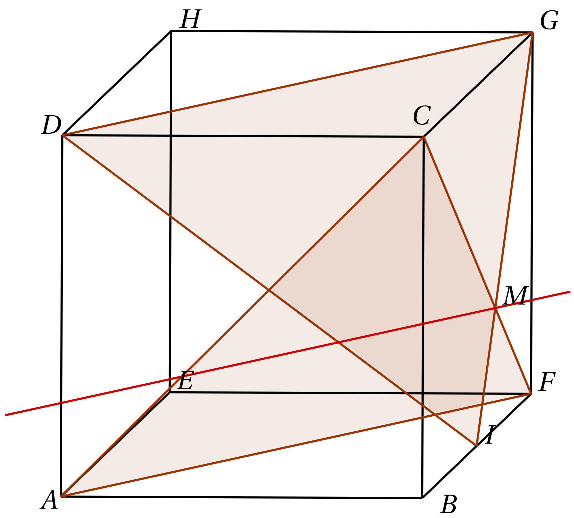
Solution :

1. Dans le triangle HFC : I est le milieu de $[HF]$ et K celui de $[FC]$. Par le théorème des milieux, on en déduit que $(IK)//(HC)$.
2. Dans le triangle AHC : N est le milieu de $[AC]$ et M celui de $[AH]$. Par le théorème des milieux, on en déduit que $(MN)//(HC)$. Deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles entre elles. Donc $(IK)//(MN)$.
3. De la même manière, on démontre que (JN) et (IL) sont parallèles. Ainsi, dans le plan (IKL), se trouvent deux droites sécantes, qui sont respectivement parallèles à deux droites sécantes du plan (JMN) : on en déduit que les plans (IJK) et (JMN) sont parallèles.
   Ce résultat reste vrai pour toute paire de faces opposées de l'octaèdre.

VI-3 Déterminer l'intersection de deux plans

Exercice 24 :

$ABCDEFGH$ est un cube, I est le milieu de l'arête $[BF]$.
Déterminer et tracer l'intersection des plans (AFC) et (DIG).

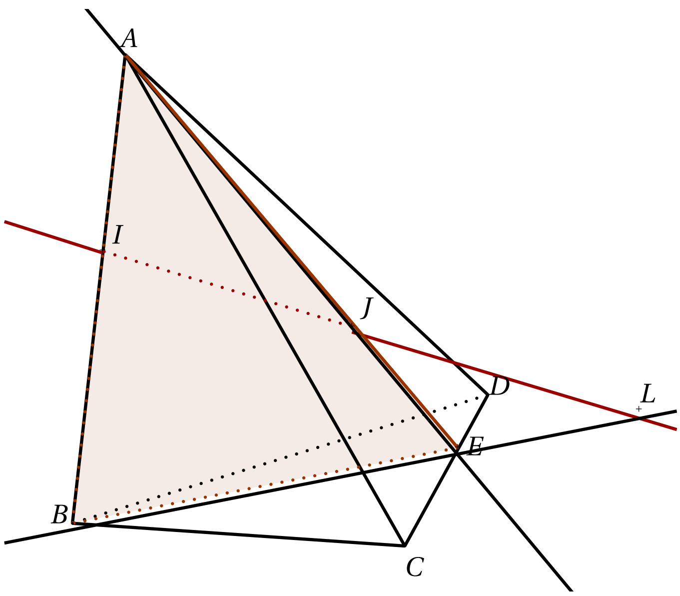


Solution :
On commence par chercher un point commun aux deux plans.
La droite (GI) est contenu dans les plans (DIG) et (BFG). De même la droite (CF) est contenu dans les plans (AFC) et (BFG). Par conséquent (CF) et (GI) sont sécantes, en un point que l'on appelera M (elles ne peuvent en aucun cas être parallèles).
Il est difficile, ici, de trouver un deuxième point commun. En revanche on remarque que $(DG)//(AF)$ car ses droites portent les diagonales de deux faces opposées du cube.
Or $(DG) \subset (DIG)$ et $(AF) \subset (AFC)$, d'après le théorème du toit, on en conclut que la droite d'intersection des plans (DIG) et (AFC) est parallèle aux deux droites (DG) et (AF).
On peut ainsi tracer la droite recherchée : c'est la droite passant par le point M et parallèle aux droites (DG) et (AF).

Exercice 25 :
Soit $SABCD$ une pyramide dont la base $ABCD$ est un trapèze avec $(AB)//(CD)$. Déterminer l'intersection des plans (SAC) et (SBD), puis des plans (SAB) et (SCD).

VI-4 Déterminer l'intersection d'une droite et d'un plan

Exercice 26 :
Soit $aBCD$ un tétraèdre. I est un point de l'arête $[AB]$. J est un point de la face ACD tel que la droite (IJ) n'est pas parallèle au plan (BCD).
Construire l'intersection de la droite (IJ) et du plan (BCD).



Solution :
On cherche un plan auxiliaire, contenant la droite (IJ) et coupant le plan (BCD) ; ici le plan (AIJ) convient.
La droite (IJ) n'est pas contenu dans le plan (BCD) et n'est pas parallèle au plan (BCD) donc elle est sécante au plan (BCD).
La droite (AJ) coupe la droite (CD) en un point qu'on appelle E (on observe ici la face ACD).
Les droites (IJ) et (BE) sont toute entière contenu dans le plan (AIJ) et comme (IJ) n'est pas parallèle au plan (BCD), la droite (IJ) est sécante avec la droite (BE). Notons L l'intersection de (BE) et (IJ). L est alors le point cherché.