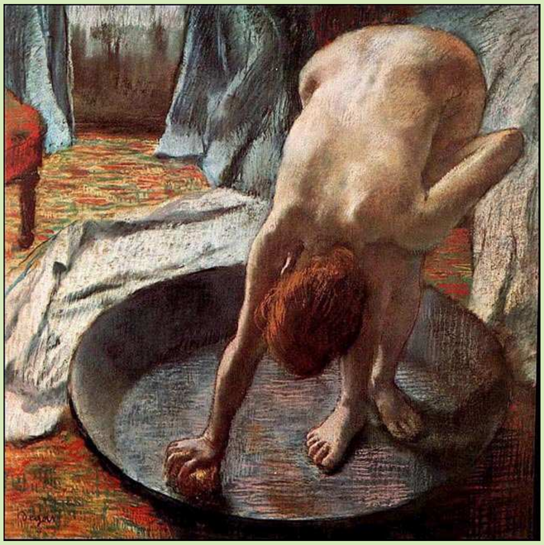
Chapitre 1

Exprimer une quantité en *fonction* d'une autre

Hors Sujet



Titre : « Autoportrait (1863) » et « Le Tub (1885) »

Auteur : Edgar Degas

Présentation succinte de l'auteur : Edgar Degas (1834-1917) est un peintre français, en général rattaché au mouvement impressionniste, formé à la fin du XIXe siècle, en réaction à la peinture académique de l'époque.

Sa carrière fut dès le départ influencée par les danseuses. En 1874, il commence à se faire connaître, les critiques louant ou dénigrant le réalisme de son travail. Il explore des thèmes comme les repasseuses ou les femmes à leur toilette, multipliant les points de vue audacieux, recherchant des effets lumineux et colorés. Il dit d'ailleurs à propos de ses nus : « Jusqu'à présent, le nu avait toujours été représenté dans des poses qui supposent un public. Mais mes femmes sont des gens simples... Je les montre sans coquetterie, à l'état de bêtes qui se nettoient. »

A partir des années 1880, Degas va aussi poser la question d'une sculpture « impressionniste », réalisant des modèles en cire peints au naturel, qu'il accessoirise ensuite. Seule *La Grande Danseuse* (cf première page) fut présenté de son vivant, les autres modèles l'aidant surtout dans ses peintures. Cette incarnation de la grâce et de l'innocence trahit en réalité la fascination de Degas pour la criminalité. En effet, avec son visage est sculpté sur le modèle des physionomies de criminels définies à l'époque, et la danseuse était un parfait « petit rat », transmettant la syphilis aux bourgeois venant la voir ...

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : C. Aupérin
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée : Jules Fil (Carcassonne)

Table des matières

« *Quand quelqu'un paye un tableau* $3\,000$ *francs, c'est qu'il lui plaît.*
Quand il le paye $300\,000$ *francs, c'est qu'il plaît aux autres.* »
EDGAR DEGAS

LEÇON 1

Exprimer une quantité en *fonction* d'une autre

Petite Danseuse de 14 ans
ou *La Grande danseuse* (1879-1881)

Au fil du temps

Le concept de fonction a mis des siècles à s'établir en mathématiques. La notion intuitive comme relation entre plusieurs quantités est assez ancienne, mais il faut attendre le $XVII^e$ siècle pour qu'elle soit formalisée. Découvrir les fonctions, apprendre à les représenter et à étudier certaines de leurs propriétés représente une partie importante du programme de seconde.

– C'est le français Pierre de Fermat (16010-1665) qui met en place la notion fondamentale d'équation d'une courbe, associant donc ainsi les fonctions à une courbe du plan, et s'intéresse aux extrema de fonctions.
  Fermat est essentiellement connu pour ses théorèmes en arithmétique, notamment pour son grand théorème, qu'il prétendit avoir démontré dans une note de bas de page, mais dont la preuve ne fut trouvée qu'en 1994.
– En 1673, l'allemand Gottfried von Leibniz (1646-1716), à la fois philosophe et mathématicien, utilise pour la première fois le mot « fonction » et introduit le vocabulaire.
  Leibniz est essentiellement connu en sciences pour avoir découvert conjointement avec Newton le calcul infinitésimal, c'est-à-dire dans l'infiniment petit.
– En 1698, le suisse Jean Bernoulli (1667-1748) reprit le terme et en donne une première définition. Il proposa alors la notation $f(x)$.
  Bernoulli développa le calcul exponentiel et la théorie des probabilités.
– Euler, mathématicien formé par Bernoulli, adopte cette notation en 1734 et définit en 1748 une fonction d'une variable comme combinaison d'opérations à partir de cette variable et de nombres constants.
  Euler travailla essentiellement sur le calcul infinitésimal lui aussi et sur la théorie des graphes (utiliser pour les GPS)

En fait, le lien entre l'expression algébrique d'une fonction et sa courbe représentative en permet une étude plus approfondie. Le concept de fonction et l'étude de leur propriété a révolutionné la recherche mathématique. jusqu'à aujourd'hui. Compte tenu du nombre incroyable d'applications en physique, en économie et dans quasiment tous les domaines, l'étude des fonctions est l'un des objectifs majeurs du lycée en mathématiques.

Dans ce chapitre, nous allons essentiellement découvrir le vocabulaire, travailler les calculs et l'approche graphique. Cependant, tout cela nous permettra également de réfléchir aux différents types de nombres et ensembles les désignant, ainsi qu'à la pertinence d'une écriture d'expression algébrique plutôt qu'une autre.

I) Notion de fonction

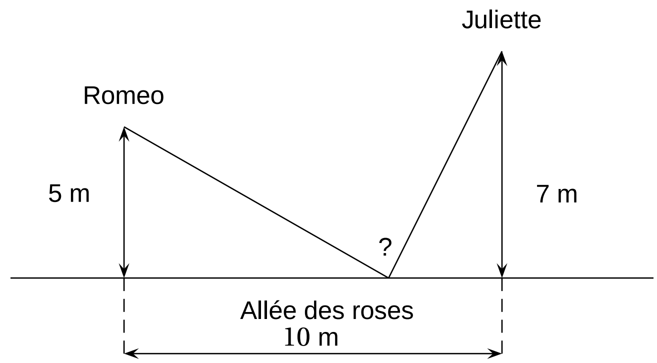
I-1 Activité découverte

Travail de l'élève **1.**

Roméo souhaite au plus vite offrir une rose fraîchement cueillie à Juliette.

La situation est schématisée de la façon ci-contre.

Quel chemin doit prendre Roméo pour rejoindre Juliette le plus tôt possible ?



Objectifs **:** modéliser d'un problème, introduire la notion de variable, faire le lien entre deux quantités, introduire la notion de fonction, constater la pertinence de représenter une fonction et/ou de faire un tableau de valeurs, discuter des valeurs approchées, introduire la notation d'intervalles.

Prérequis **:** Pythagore.

Remarque : Le problème possède également une réponse géométrique (par symétrie).

Définition 1 :
Une **fonction** est une relation qui associe un élément d'un ensemble de départ E à au plus un élément d'un ensemble d'arrivée F (donc à 0 ou 1 élément de F).

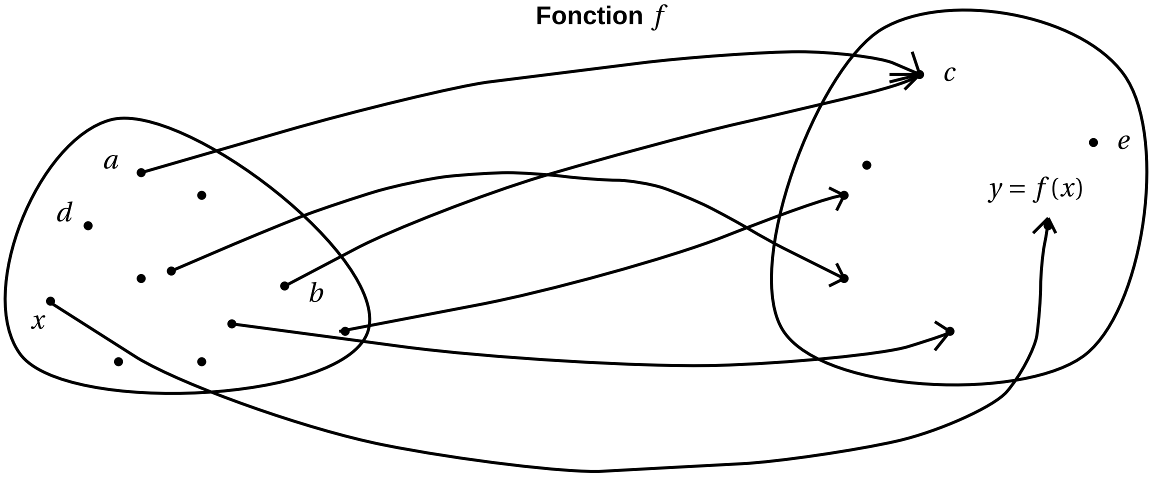
Exemples :
Vous connaissez déjà quelques fonctions en géométrie :
- La formule du périmètre d'un cercle est la fonction qui à tout nombre positif R associe le nombre $2\pi R$.
- La formule de l'aire d'un triangle est la fonction qui à tout couple de nombres positifs $(b;h)$ associe le nombre $\dfrac{b\times h}{2}$

Remarque : Une fonction peut associer autres choses que des nombres entre eux.
Par exemple, à un segment on peut associer son milieu.
Cette année, nous n'étudierons cependant que les fonctions qui transforment un seul nombre en un autre. On parle de fonction **numérique à une variable**.
En général, on nous donnera l'expression algébrique d'une fonction, sans préciser ce qu'elle représente concrètement.

Exemple :
La fonction qui à un nombre x associe le nombre $2x-1$.

I-2 Vocabulaire

Fonction f



Ensemble de départ E **Ensemble d'arrivée F**

Remarques :

- On note souvent une fonction f (mais on peut les appeler comme on veut).
- Un élément de E n'est pas forcément associé à un élément de F. On l'appelle alors **valeur interdite** de la fonction.
  Ici, d est une valeur interdite de f (mais pas e !).
- Un élément de E ne peut pas être associé à plusieurs éléments de F.
  Ici, il ne peut pas y avoir une deuxième flèche partant de x.
- Plusieurs éléments de E peuvent étre associés au même élément de F.
  Ici a et b sont tous les deux reliés à c.

Définition 2 :

Si un élément x de E est associé par une fonction f à un élément y de F, alors y s'appelle l'**image de** x par la fonction f et on le note $f(x)$. On pourra également noter $f : x \mapsto y$
De plus, on dit que x est un **antécédent de** y par la fonction f.
L'ensemble des éléments x de E auxquels une fonction f fait correspondre un élément y de F est appelé **l'ensemble de défintion** de f et est noté D_f.

Remarques :

- Un élément de E possède 0 ou 1 image par f.
  Ici, a possède une image par f, c'est c. On note $f(a) = c$ ou encore $f\, x \mapsto c$.
  Tandis que d ne possède pas d'image par f.
- Un élément de F peut ne pas avoir d'antécédent par f, comme en avoir un seul, ou plusieurs.
  Ici, e ne possède pas d'antécédent par f.
  Par contre, y en possède 1, c'est x. On a donc $f(x) = y$.
  De plus, c possède 2 antécédents par f, il s'agit de a et b. On a donc $f(a) = f(b) = c$
- L'ensemble de définition d'une fonction f est en fait l'ensemble des éléments de E, sauf les valeurs interdites.

Exercices du livre :

n° 5-6 p 46

Exemples :

- Soit g la fonction qui à un nombre x associe le nombre $g(x) = 5 - 3x$.
  L'image de 0 est $g(0) = 5 - 3 \times 0 = 5$.
  Chercher de même l'image de $\frac{4}{9}$ et celle de -2.

  En fait, on peut toujours calculer l'image d'un nombre par la fonction g. Il n'y a donc pas de valeurs interdites. L'ensemble de définition de g est donc l'ensemble des nombres que vous connaissez. On le note $\mathbb{R}$ et on appelle ces nombres, les nombres réels.
  On a donc $D_g = \mathbb{R}$.

  On peut également chercher les éventuels antécédents de nombres de l'ensemble d'arrivée.
  Pour cela, on résout toujours une équation.
  L'éventuel antécédent de 0 est le nombre x tel que $g(x) = 0$. On doit donc résoudre :

$$\begin{aligned} & 5 - 3x = 0 \\ \overset{-5}{\iff} \quad & -3x = -5 \\ \overset{\times(-1)}{\iff} \quad & 3x = 5 \\ \overset{/3}{\iff} \quad & x = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

  L'antécédent de 0 est $\frac{5}{3}$.
  Chercher de même les éventuels antécédents de 4 et de -2.

- Soit l la fonction qui à un nombre x associe le nombre $l(x) = \dfrac{3}{6-2x}$.
  L'image de 1 par l est le nombre $l(1) = \dfrac{3}{6 - 2 \times 1} = \dfrac{3}{4}$.
  Quelle est l'image de 0 ? de -4 ?

  En fait, on peut toujours calculer $l(x)$ sauf si l'on est amené à diviser par 0, ie si et seulement si $6 - 2x = 0 \iff x = 3$.
  La seule valeur interdite est donc 3.
  L'ensemble de définition de l est donc tous les nombres sauf 3. On le note $D_l = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

  L'éventuel antécédent de 1 est le nombre tel que $l(x) = 1$. On doit donc résoudre

$$\begin{aligned} & \frac{3}{6-2x} = 1 \\ \iff \quad & 3 = 6 - 2x \quad \text{et } x \neq 3 \\ \overset{-6}{\iff} \quad & -3 = -2x \quad \text{et } x \neq 3 \\ \overset{\times(-1)}{\iff} \quad & 3 = 2x \quad \text{et } x \neq 3 \\ \overset{/2}{\iff} \quad & x = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

  L'antécédent de 1 est donc $\frac{3}{2}$.
  Quels sont les éventuels antécédents de 0 ?

Exemple :

Soit la fonction f qui à tout réel x associe le réel $f(x) = 3\sqrt{x+2} + \sqrt{11-x}$ quand il existe.
L'image de 7 par f est le nombre $f(7) = 3\sqrt{7+2} + \sqrt{11-7} = 3\sqrt{9} + \sqrt{4} = 3 \times 3 + 2 = 11$.
Calculer l'image de 4.5, puis celle de 16.

En fait, on peut toujours calculer $f(x)$ à partir du moment où les valeurs sous les racines sont des quantités positives. On doit donc avoir $x \geq -2$ **et** $x \leq 11$, ie $-2 \leq x \leq 11$.
On note $[-2;11]$ l'ensemble des nombres compris entre -2 et 11 inclus et on appelle cet ensemble un intervalle.
On a donc $D_f = [-2;11]$.

On sait que 7 est un antécédent de 11 par f, mais il en existe en fait un deuxième proche de 10.97. Pour trouver le trouver exactement, on doit résoudre l'équation $3\sqrt{x+2} + \sqrt{11-x} = 11$, qui est trop compliquée en seconde.

Méthodes

1. Pour trouver l'image d'un nombre x par une fonction f, on remplace x par sa valeur dans l'expression algébrique de f et on compte.
2. On trouve les éventuels antécédents d'un nombre y par une fonction f en résolvant l'équation $f(x) = y$.
3. On trouve l'ensemble de définition d'une fonction f en cherchant les valeurs interdites. Pour cela, on applique les deux règles suivantes :
   a. On ne divise pas par zéro.
   b. On ne prend pas la racine d'un nombre strictement négatif.

Exercice 1 :

Soit la fonction f définie qui à tout réel x associe le réel $f(x) = x^2 - \dfrac{6}{x}$ quand il existe.

1. Calculer $f(-2)$.
2. Calculer l'image de 3.
3. Pourquoi l'image de 0 par f n'existe-t-elle pas ? En déduire l'ensemble de définition de f.

Exercice 2 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - 2x + 3$$

1. La fonction f admet-elle des valeurs interdites ? En déduire sont ensemble de définition D_f.
2. Déterminer l'image par f des réels 0 ; $-\dfrac{3}{2}$ et $\sqrt{2}$.
3. Déterminer les éventuels antécédents de 3 par f.
4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) = (x-1)^2 + 2$.
5. En utilisant cette dernière écriture, déterminer les éventuels antécédents de 2 et de -4 par f.

Exercice 3 :

Soit la fonction g qui à tout réel x associe le réel $g(x) = 2x^2 - 3$
Déterminer l'image de 3, puis celle de -1 par la fonction g.
Déterminer les antécédents éventuels de 7, de -3 et de -4 par la fonction g.

Exercices du livre :
n° 7-9 p 46 + 55 p 54 (basiques)
+ n° 18 à 27 p 48 + 44 p 52 (révisions développement/factorisation à faire en ***module***)
+ n° 28-30 p 48 (choix d'une écriture)
+ n° 33-35-40-41 p 50 (approfondissement)

II) Ensembles de nombres

II-1 Divers type de nombres

Un peu d'histoire

Aujourd'hui, on connait beaucoup de nombres, regroupés en ensembles en fonction de leurs propriétés, mais il n'en a pas toujours été ainsi.
Les entiers positifs (ou ***naturels***) sont connus depuis la préhistoire (au moins $-35\,000$), excepté pour le zéro découvert et formalisé bien plus tard. Les nombres pouvant s'écrirent comme quotient d'entiers (ou ***rationnels***) furent également assez vite découverts, car ils renvoient à la notion de partage.
Rapidement (au moins -2000), on s'intéresse à certains nombres ***irrationnels*** particuliers (réels ne pouvant pas s'écrire comme le quotient de deux entiers), tels que $\sqrt{2}$ ou π.
On manipule les 4 opérations depuis fort longtemps, dont la soustraction. Cependant, il faudra attendre le VIII^e siècle pour que les nombres négatifs soient découverts, suite à l'introduction de la numération positionnelle, des chiffres arabes et du fameux zéro.
Cette découverte est probablement la plus importante de l'algèbre. Elle arriva avec la mise en place d'une méthode générale de résolution d'équation. On constata alors qu'une équation n'ayant que des paramètres entier positifs pouvait avoir des solutions qui ne l'étaient pas (comme $2x+5=3$)... On fut donc contraint de s'intéresser à la nature des nombres, et d'en introduire de nouveaux, comme les négatifs.

On a vu précédemment de nouvelles notations pour désigner un ensemble de nombres. Il en existe d'autres, résumées dans cette partie.

Définition 3 :

Rappelons déjà que $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres que vous connaissez, appelés **nombres réels**.
$\mathbb{Q}$ désigne l'ensemble des nombres pouvant s'écrire sous forme d'une fraction (quotient de deux entiers et de dénominateurs non nul), appelés **nombres rationnels**.
$\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des nombres entiers, appelés **nombres entiers relatifs**.
$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des nombres entiers positifs ou nul, appelés **nombres entiers naturels**.

Exemples :

A faire trouver

Remarque : On remarquera que tout entier naturel est également un entier relatif.
De même tout entier relatif peut s'écrire comme une fraction de dénominateur 1, c'est donc également un rationnel.
Enfin tout rationnel est un nombre que vous connaissez, c'est donc un réel.
Nous utiliserons peu les autres notations que $\mathbb{R}$ dans ce chapitre.

II-2 Intervalles de $\mathbb{R}$

Il est souvent utile de ne désigner qu'une partie de $\mathbb{R}$, notamment pour les ensembles de définition. En particulier, on s'intéressera souvent à l'ensemble des nombres compris entre deux autres fixés, appelés **intervalle**.
Les tableaux ci-dessous résument les diverses situations.

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

Inégalité	Représentation graphique	Intervalle borné	Dénomination
$a \leq x \leq b$			
			Intervalle ouvert
			Intervalle semi-ouvert à droite
			Intervalle semi-ouvert à gauche

Inégalité	Représentation graphique	Intervalle	Dénomination
$x \geq a$		$[a;+\infty[$	Intervalle fermé
		$]a;+\infty[$	

Remarque : On note :

- $\mathbb{R}^+ = [0;+\infty[$
- $\mathbb{R}^- =]-\infty;0]$
- $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- $\mathbb{R}^{+*} =]0;+\infty[$
- $\mathbb{R}^{-*} =]-\infty;0[$
- $\mathbb{R} =]-\infty;+\infty[$

Exemples :

1. Donner les intervalles correspondant aux inégalités suivantes :

$$-6 \leq x \leq 7 \qquad -5 < x \qquad x \leq 3$$

2. Donner les inégalités correspondant aux intervalles suivants :

$$\left]\frac{1}{3};\sqrt{7}\right] \qquad \left[-\sqrt{5};+\infty\right[$$

Exercices du livre :

n° 1-2 p 46 + 50-52-53 p 53

III) Algorithmie

Un peu d'histoire

Dans l'antiquité, les mathématiques sont utilisées pour les besoins quotidiens, tels que des calculs d'aires de champs, d'impôts lors des crues du Nil, de constructions. Elles servent aussi à résoudre des problèmes dans lesquels figure une (ou plusieurs) quantité inconnue à trouver.

Vers 1800-1500 avant JC, les Babyloniens savent déjà résoudre des équations du 1^{er} et du 2^{nd} degré. On parle de "chose" à trouver et on suit un discours logique phrasé (peu clair pour nous aujourd'hui) pour arriver à une solution.

Ce n'est qu'au VIII^e siècle, avec l'introduction de la numération positionnelle, des chiffres arabes et du zéro, que la théorie générale prend place peu à peu. Le point de départ est de désigner dans des calculs l'inconnue par un symbole (aujourd'hui souvent la lettre x) puis de mettre en équation les problèmes.

Rapidement, on comprend l'intérêt d'une telle méthode. C'est *Al-Khawarizmi* qui le premier s'intéresse à cela et classifie les différents types d'équations, afin que dans chaque problème, on n'ait plus qu'à reconnaitre le type d'équation et suivre la méthode générale appropriée, menant à la solution. Le mot ***algorithme*** découle de son nom et désigne aujourd'hui ***une procédure à suivre, à partir d'un élément donné, pour arriver à une solution unique***.

Jusqu'au début du XIX^e, trouver des algorithmes de résolutions d'équations constituent la préoccupation principale des algébristes. Ils développent la notation symbolique et la conventionnent : au XVI^e Viete sépare l'alphabet en deux, le début désignant plutôt les paramètres, la fin les inconnues, ce qui est encore utilisé de nos jours. On catégorise les équations suivants leurs paramètres, leur degré et leur nombre d'inconnues, afin de généraliser le plus possible leur résolution.Parallèlement, la notion de fonction prend forme.

Les équations de degré 3 sont résolues par les italiens Tartaglia et Cardan au XVI^e siècle, et celles de degré 4 par l'élève de ce dernier, Ferrari. L'histoire des formules de résolution s'arrête là, car le français Evariste Galois (1811-1832) montre au XIX^e qu'il est impossible de trouver des formules de résolution pour les équations de degré supérieur ou égal à 5.

Définition 4 :

Un **algorithme** est une suite d'instructions, qui, une fois exécutée correctement, conduit à un unique résultat.

Exemples :

Indiquer un itinéraire allant d'un lieu à un autre, une recette de cuisine, télécharger un ficher, compresser des données, les jeux vidéos, les feux tricolores, les lumières de la tour Eifel, le pilote automatique des avions, la cryptographie (codage de messages) ...

En mathématiques, vous connaissez déjà l'algorithme d'Euclide qui permet de trouver le pgcd de deux nombres entiers positifs.

Les Babyloniens suivaient un algorithme très performant pour trouver une valeur approchée de la racine carré d'un nombre.

Dans ce chapitre, nous allons écrire un algorithme pour calculer les images d'une fonction donnée.

Exemple : Vocabulaire, démarche et rédaction

Dans certains magasins, en période de soldes, le prix figurant sur un article correspond au prix sans la remise et une étiquette précise -20%, -30% ...
On voudrait écrire un algorithme, puis un programme sur Algobox, qui détermine le montant de la remise ainsi que le prix à payer.

1. **Détermination des variables : analyse préliminaire**
   - **a.** Quelles sont les informations initiales dont nous avons besoin ?
     On les appelle les *entrées* de l'algorithme.
   - **b.** Que doit-on calculer ?
     On prendra l'habitude de faire afficher le(s) résultat(s) de l'algorithme, que l'on appelle *sortie(s)*.
     L'ensemble des données de l'algorithme pouvant variées (entrées-sorties) sont les *variables*.
2. **Rédaction du processus français : l'algorithme**
   On commence toujours un algorithme en énonçant les variables mise en jeu (désignées par des lettres), et en précisant leur nature (nombre, mots ...)
   Saisir une donnée permet à l'utilisateur d'attribuer une valeur à une variable (ce sont les entrées).
   Affecter une donnée permet à l'algorithme d'attribuer une valeur à une variable (on peut aussi utiliser le symbole →)
   Afficher permet à l'utilisateur de voir un texte (entre guillemets) ou la valeur d'une variable à l'écran. Compléter l'algorithme suivant :

   Algorithme 1 : *Calcul d'une remise et d'un nouveau montant*

   Variables
   ...., ..., ..., ... sont des nombres réels

   Début
   Saisir ...
   Saisir ...
   Affecter à ... la valeur ....
   ...... → ...
   Afficher " Le montant de la remise est " ...
   Afficher " Le prix à payer est " ...

   Fin
3. **La programmation : sur Algobox et sur TI**
   Trouver comment programmer cet algorithme sur Algobox et sur votre calculatrice.

Remarques :

– Pour fonctionner, un algorithme doit contenir uniquement des instructions compréhensibles par celui qui devra l'exécuter
– En mathématiques, les algorithmes consistent par exemple en des suites d'opérations à effectuer (pour les fonctions notamment), ou des suites de manipulations à faire (pour construire une figure géométrique).
  On considère pour acquises les connaissances du collège, et l'on pourra donc les utiliser comme instructions.
– On peut alors voir une fonction numérique comme une machine, dans laquelle on introduit un nombre et en ressort un nombre transformé ou modifié, suivant un algorithme de calcul donné.

Nombre x		Machine f		Nombre transformé $f(x)$
Antécédent		Fonction		Image

Exemple :

Considérons la machine f qui retranche 3 et élève au carré.

- Si on rentre le nombre 0, il en ressort 9, ou encore l'image de 0 par f est 9, ou encore $f(0)=9$
- Si on rentre 3, il en ressort 0, ie l'image de 3 par f vaut 0, ie $f(3)=0$.
- Si on rentre le nombre -4, il en ressort 49, ou encore l'image de -4 par f est 49, ou encore $f(-4)=49$
- Si on rentre $\sqrt{2}$, il en ressort $(\sqrt{2}-3)^2$, ie $f(\sqrt{2})=(\sqrt{2}-3)^2$.
- Si on rentre x, il en ressort $(x-3)^2$, ie $f(x)=(x-3)^2$.

Ici, on a décrit la fonction numérique $f : x \longmapsto (x-3)^2$ dont l'ensemble de définition est $\mathbb{R}$, par l'algorithme calculatoire :

$$x \longmapsto x-3 \longmapsto (x-3)^2$$

L'algorithme détaillant les étapes de calcul et donnant en sortie l'image d'un nombre est le suivant :

Algorithme 2 : ***Fonction***

Variables
x, y, a sont des nombres réels

Début
Saisir x
Affecter à a la valeur $x-3$
$a^2 \to y$
Afficher y
Fin

ou encore

Algorithme 3 : ***Fonction***

Variables
x, y sont des nombres réels

Début
Saisir x
Affecter à y la valeur $x-3$
$y^2 \to y$
Afficher y
Fin

On aimerait désormais écrire un algorithme donnant les éventuels antécédent d'un nombre par la fonction f.
Par exemple, un antécédent de 9 par f est 0, car on a vu précédemment que $f(0)=9$. Mais il en existe peut-être d'autres.
Pour tous les trouver, on doit résoudre $f(x)=9$. Or

$$\begin{aligned}(x-3)^2=9 &\iff x-3=3 \text{ ou } x-3=-3\\ &\iff x=6 \text{ ou } x=0\end{aligned}$$

Donc les antécédents de 9 par f sont 0 et 6.
Un antécédent de 0 par f est 3. On peut vérifier que c'est le seul en résolvant l'équation $(x-3)^2=0$.
Par contre, -1 n'a pas d'antécédent par f, car l'équation $(x-3)^2=-1$ n'a pas de solutions.
L'algorithme cherché est :

Algorithme 4 : *Antécédents*

Variables
x_1, x_2, y, a, b sont des nombres réels

Début
Saisir y
Si $(y < 0)$ **Alors**
Afficher y "n'a pas d'antécédent par f"
Sinon
Affecter à a la valeur $\sqrt{y}$
Affecter à b la valeur $-\sqrt{y}$
Affecter à x_1 la valeur $a+3$
Affecteur à x_2 la valeur $b+3$
Afficher "Les antécédents de" y "sont" x_1 "et" x_2
Fin Si
Fin

Exercice 4 :

On choisit un nombre, on lui ajoute 4, on élève le résultat au carré, on retranche 16 et on divise le tout par le nombre de départ.
Quelle est la fonction $blop$ décrite par cet algorithme ? Quelle est l'image de 4 ? Que vaut $blop(0)$?

Exercice 5 :

Décrire la fonction associée à l'algorithme ci-contre et donner son ensemble de définition.

Algorithme 5 :

Variables
x et y sont des nombres réels

Début
Saisir x
Affecter à y la valeur $\sqrt{2x}+5$
Afficher y
Fin

Exercice 6 :

Ecrire un algorithme permettant de déterminer les antécédents de n'importe quel nombre réel y par la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x+1$

Exercices du livre :

n° 4 p 46 + 45 p 52

Exercice 7 :

Déterminer **toutes** les bonnes réponses.
On donne le programme de calcul suivant et l'algorithme correspondant :

1. Une expression algébrique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par cet algorithme est :
   - **a.** $f(x) = x^2 - 2x + 2$
   - **b.** $(x-1)^2 + 1$
   - **c.** $f(x) = x^2 + 2$
2. L'image de 2 par f est :

   a. 0 **b.** 2 **c.** 10
3. L'image de -1 par f est :

   a. -1 **b.** -3 **c.** 5
4. Les antécédents de 10 par f sont :

   a. 4 **b.** -2 **c.** 0
5. Les antécédents de 17 par f sont :

   a. 5 **b.** 2 **c.** -3

Exercice 8 :

Donner **toutes** les bonnes réponses. On donne l'algorithme ci-contre :

1. Le nombre obtenu avec l'entrée -2 est :

   a. 0 **b.** -4 **c.** 12
2. Le nombre obtenu avec l'entrée 1 est :

   a. 5 **b.** 2 **c.** 13
3. Si on veut obtenir 0, on peut entrer :

   a. 0 **b.** -2 **c.** -4
4. Si on veut obtenir -4, on peut entrer :

   a. 0 **b.** 2 **c.** -2
5. Une expression algébrique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par cet algorithme est :
   - **a.** $f(x) = x^2 - 2$
   - **b.** $f(x) = (x+2)^2 - 4$
   - **c.** $f(x) = x^2 + 4x$

Programme de calcul

- Choisir un nombre
- Mettre le nombre au carré
- Calculer le double du nombre
- Soustraire le deuxième résultat au premier
- Ajouter 2.

Algorithme 6 :

Variables
  x, a, b, c sont des nombres réels

Début
  Entrer x $a \leftarrow x^2$
  $b \leftarrow 2 \times x$
  $c \leftarrow a - b + 2$
  Afficher c
Fin

Algorithme 7 :

Variables
  x, a et b sont des nombres réels

Début
  Entrer x
  $a \leftarrow x + 2$
  $b \leftarrow a^2 - 4$
  Afficher b
Fin

Exercice 9 :
Un consommateur a la possibilité de choisir entre deux formules de location d'un studio pour ses vacances :
– Formule A : location fixe de 205€ + 10€ de charges par jour
– Formule B : location fixe de 300€ + 5€ de charges par jour.

1. Quelle est la formule la plus avantageuse pour une location d'une semaine ? de 12 jours ?
2. Pour chaque formule, exprimer le montant à régler en fonction du nombre N de jours de location.
3. D'une façon plus générale, le consommateur souhaite connaître la formule la plus avantageuse en fonction du nombre de jours de location.
   On lui propose les algorithmes suivants.
   Quel(s) est (sont) le(s) algorithme(s) correct(s) ?

Algorithme 8 :

```
Variables
    N, A, B sont des nombres entiers
Début
    Entree N
    A ← 250 + 10N
    B ← 300 + 5N
    Si (A < B) Alors
        Afficher « B »
    Sinon
        Si (A = B) Alors
            Afficher « A ou B »
        Sinon
            Afficher « A »
        Fin Si
    Fin Si
Fin
```

Algorithme 9 :

```
Variables
    N, A, B sont des nombres entiers
Début
    Entree N
    A ← 250 + 10N
    B ← 300 + 5N
    Si (A < B) Alors
        Afficher « A »
    Sinon
        Si (A = B) Alors
            Afficher « A ou B »
        Sinon
            Afficher « B »
        Fin Si
    Fin Si
Fin
```

Algorithme 10 :

```
Variables
    N, D sont des nombres entiers
Début
    Entree N
    D ← 5N − 50
    Si (D > 0) Alors
        Afficher « B »
    Sinon
        Si (D = 0) Alors
            Afficher « A ou B »
        Sinon
            Afficher « A »
        Fin Si
    Fin Si
Fin
```

IV) Représentation graphique d'une fonction

IV-1 Définition

On peut associer à une fonction un tableau de valeurs (que l'on trouve à la calculatrice). Il comporte deux lignes, la première regroupe les antécédents x et la seconde les images $f(x)$ correspondantes.
On peut alors placer les points de coordonnées $(x; f(x))$ dans un repère $(O; I; J)$ du plan.

Définition 5 :

La **courbe représentative** $\mathscr{C}_f$ (ou encore **représentation graphique**) d'une fonction f définie sur D_f est l'ensemble des points de coordonnées $\big(x; f(x)\big)$ où x parcourt D_f.

Autrement dit : $M(x;y) \in \mathscr{C}_f$ si et seulement si $\begin{cases} x \in D_f \\ f(x) = y. \end{cases}$

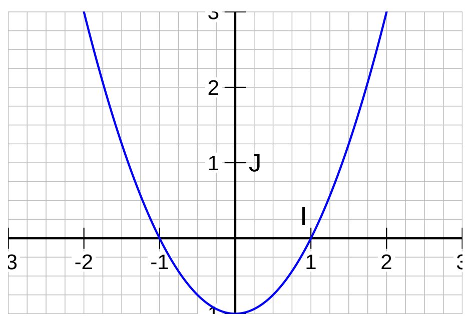
On dit que la courbe $\mathscr{C}_f$ a pour équation $y = f(x)$ dans le repère choisi.

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 1$. Compléter le tableau de valeurs suivant grâce à la calculatrice :

x	-2	-1	-0.5	0	1	2	3
$f(x)$							

Représenter dans un repère orthonormé les points de coordonnées $\big(x; f(x)\big)$.
Imaginer alors l'allure de la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f.
Le point $A(1.5; 1.25)$ appartient-il à $\mathscr{C}_f$? Et le point $B(0.5; -0.7)$?



Remarque : Pour tracer la courbe représentative d'une fonction, on relie les points du tableau de valeurs avec le plus de cohérence possible. On prendra toujours un tableau avec ***au moins 10 valeurs*** et on consultera le tracé de la courbe sur la calculatrice pour s'aider.
Néanmoins, on ne sait pas exactement comment varie la fonction entre deux points de la courbe, ni en dehors du graphique.

Utilisation de la calculatrice

Pour obtenir un tableau de valeurs (et la courbe représentative d'une fonction) à la calculatrice graphique :

- On rentre la fonction considérée dans $\boxed{\text{Y=}}$ **ou** dans $\boxed{\text{f(x)}}$ **ou** dans $\boxed{\text{Menu}}$ + $\boxed{\text{Graph}}$.
- On règle les paramètres du tableau de valeurs (première, dernière valeur de x et pas) dans le menu $\boxed{\text{Table}}$ + $\boxed{\text{Tblset}}$ (jaune + F4) **ou** dans $\boxed{\text{Déf table}}$ (jaune + F2) **ou** dans $\boxed{\text{Menu}}$ + $\boxed{\text{Table}}$ + $\boxed{\text{F5}}$:

CASIO	**TI**
Start=...	TblStart=...
End=...	ΔTbl=...
Pitch=...	

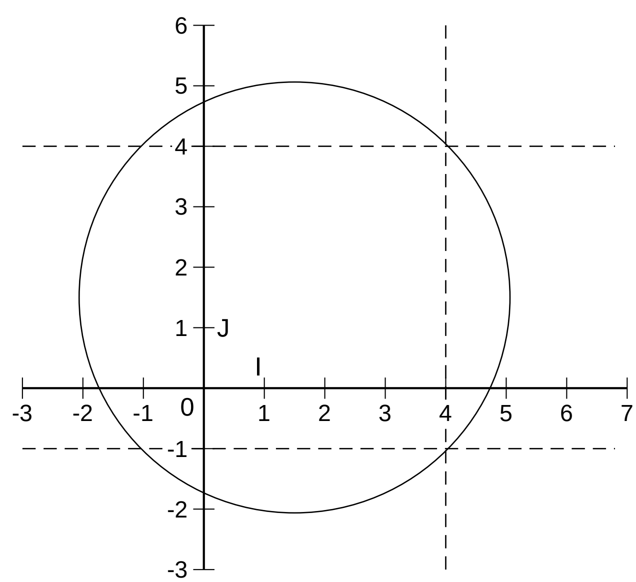
- On règle les paramètres de la fenêtre graphique (début et fin du x, début et fin du y, échelle) dans le menu $\boxed{\text{Graphe}}$ + $\boxed{\text{windowset}}$ (jaune + F ?) **ou** dans $\boxed{\text{fenêtre}}$ **ou** dans $\boxed{\text{Menu}}$ + $\boxed{\text{graphe}}$ + $\boxed{\text{F5}}$:

CASIO	**TI**
Start=...	TblStart=...
End=...	ΔTbl=...
Pitch=...	

- On affiche le tableau de valeurs dans le menu $\boxed{\text{Table}}$ (jaune + F5)
- On affiche la courbe représentative dans le menu $\boxed{\text{Graphe}}$.

Remarque :

Toutes les courbes ne représentent pas des fonctions.
On s'appuie sur la définition pour le comprendre.
En effet, un élément ne peut avoir plusieurs images.



Ci-contre, on constate que le nombre 4 possède deux images : -1 et 4.
La courbe ci-contre n'est donc pas représentative d'une fonction.

Exemples :

Tracer les courbes représentatives des fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 3 \qquad g(x) = 2x + 1 \qquad \text{et} \qquad h(x) = -2x + 1$$

Exercices du livre :

n° 10 à 12 p 47 + 62 p 55

IV-2 Lecture graphique

***Travail de l'élève* 2.** Reprendre l'une des courbes tracées précédemment et répondre à des questions de lecture graphique, telles que ensemble de définition, image, antécédents, signes ...

Méthodes pour déterminer graphiquement

- **Un ensemble de définition** : On détermine l'ensemble des abscisses de tous les points de la courbe représentative.
  Puis on le décrit sous la forme d'un intervalle ou d'une réunion d'intervalles, en faisant attention aux bornes (crochets ouverts ou fermés).
- **L'image $f(a)$ d'un réel a** : On place sur la courbe le point d'abscisse a et on lit son ordonnée.
- **Les éventuels antécédents d'un réel b** : On place sur la courbe tous les points éventuels d'ordonnées b (on peut les mettre en évidence en traçant la droite parallèle à l'axe des abcisses passant par le point $(0;b)$ d'équation $y=b$) et on lit leur abscisses.

Exemple :

Dessin Déclic p 18 (méthodes) + n° 26 à 29 p 29 (basiques) + 38 à 41 p 31 (classiques)

Exercices du livre :

n° 3 + 13 + 17 p 46 (classiques) + 48 p 52 (critique) + 54-57 p 54

Exercice 10 **:**

On considère les fonctions f et g définies par

$$f(x)=2x^2-x+1 \text{ et } g(x)=\frac{3x+1}{2x-1}$$

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
   Celui de g ?
2. **Boucle Si**.
   a. Que fait l'algorithme 1 ?
   b. Ecrire un algorithme similaire pour la fonction g (en prenant soin de traiter à part le cas de la valeur interdite)
3. **Boucle Pour.**
   a. Que fait l'algorithme 2 ?
   b. Ecrire un algorithme qui donne un tableau de valeurs de g, pour x allant de -2 à 3, avec un pas de 0.5 (avec pour réponse « valeur interdite » quand nécessaire).

Algorithme 2 :

Variables
  x, y et a sont des nombres réels

Début
  Entrer x et y
  a prend la valeur $2x^2-x+1$
  Si $(y==a)$ **Alors**
    Afficher « Le point $(x;y)$ appartient à la courbe représentative de f »
  Sinon
    Afficher « Le point $(x;y)$ n'appartient pas à la courbe représentative de f »
  Fin Si
Fin

Algorithme 3 :

Variables
x, y et i sont des nombres réels

Début
Entrer x
Pour $i = -3$ **à** 5 **Faire**
y prend la valeur $2x^2 - x + 1$
Afficher $(x; y)$
i prend la valeur $i + 1$
Fin Pour
Fin

Exercice 11 :

On considère la fonction f définie sur $[-2;4]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x \in [-2;1] \\ -x^2+1 & \text{si} \quad x \in]1;4] \end{cases}$$

1. Ecrire un algorithme qui permette de calculer l'image par f d'un nombre x.
2. Construire la courbe représentative de f.

Exercice 12 :

On considère l'algorithme 3 :

1. Faire fonctionner cet algorithme pour $x = -2$, $x = 1$ et $x = 3$.
2. Cet algorithme définit une fonction f.
   a. Donner l'ensemble de définition de f.
   b. Exprimer $f(x)$ en fonction de x.
   c. Représenter graphiquement la fonction f.

Algorithme 4 :

Variables
x et y sont des nombres réels

Début
Entrer x
Si $(x < 1)$ **Alors**
$y \leftarrow x^2$
Sinon
$y \leftarrow 2x$
Fin Si
Afficher y
Fin

Approfondissement possible : établir graphiquement le signe d'une fonction, réfléchir à la cohérence entre un tableau (de valeurs ou de signe) et une courbe représentative...

« Le dessin n'est pas la forme, il est la manière de voir la forme. »

DEGAS, Edgar