DEVOIR SURVEILLÉ 6 : LES SUITES (1H)

Exercice 1 : 2 points

Calculer les sommes suivantes :

$$S_1 = 1+2+3+\cdots+2011+2012 \qquad S_2 = 7+21+63+\cdots+45\,927$$

On prendra soin de rédiger la réponse clairement. Notamment, pour S_2, on justifiera la formule utilisée en précisant la suite considérée ainsi que sa nature.

Exercice 2 : 6 points

On souhaite construire un château de cartes à n niveaux ($n \geq 1$). On a représenté ci-dessous un château à quatre niveaux. On appelle $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite dont chaque terme u_n est égal au nombre de cartes du niveau n en partant d'en haut. Ainsi $u_1 = 2$ et $u_2 = 5$.

1. Déterminer u_3 et u_4 grâce au dessin.
2. Donner la nature de la suite (u_n) ainsi que ses éléments caractéristiques *(inutile de justifier)*.
   A partir de maintenant, toutes les réponses doivent être justifiées par des formules du cours et des calculs.
3. **a.** Combien de niveaux aura un château dont la dernière rangée est composée de 23 cartes ?
   b. En déduire le nombre de cartes d'un tel château.
4. **a.** Exprimer le nombre S de cartes d'un château à n niveaux en fonction de n. *On prendra soin à n'avoir plus que la lettre n dans l'expression de S.*
   b. Quelle est le nombre de niveaux du plus grand château que l'on peut fabriquer si l'on dispose de 500 cartes ?
   c. Quelle sera alors le nombre de cartes de la rangée du bas ?

Exercice 3 : 2 points

La suite (u_n) est arithmétique de raison r. On sait que $u_{20} = 10$ et $u_{34} = -18$.

1. Calculer la raison r et u_0.
2. Calculer la somme $S = u_{50} + u_{51} + \cdots + u_{100}$

Exercice 4 : 3 points

Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + 1 \end{cases}$

1. Représenter graphiquement cette suite. *Unité graphique : 2 cm sur chaque axe*
2. Cette suite semble-t-elle converger ?
   Si oui, conjecturer graphiquement sa limite et la retrouver par le calcul.

Exercice 5 **: 5 points**

Un capital $C_0 = 10000$€ est placé sur un compte coûtant 20€ par an pour frais de gestion, puis rapportant 4% à la fin de chaque année. On nomme C_n le montant disponible sur le compte à la fin de la n^{eme} année, après le versement des intérêts.

1. **a.** Calculer C_1 puis C_2.

   b. Justifier que $C_{n+1} = 1.04C_n - 20.8$

2. On pose $u_n = C_n - 520$ pour tout $n \geq 0$.

   a. Montrer que u_n est géométrique et donner ses éléments caractéristiques.

   b. Exprimer u_n puis C_n en fonction de n.

3. Afficher sur votre calculatrice les premiers termes de la suite (C_n) et en déduire au bout de combien d'années le capital aura-t-il au moins doublé ?

Exercice 6 **: 2 points**

Etudier le sens de variation des suites de terme général suivant :

1. $u_n = n^2 - n$ pour $n \in \mathbb{N}$

2. $v_n = \dfrac{2^n}{n}$ pour $n \geq 2$