DEVOIR SURVEILLÉ 3-4 : VARIATIONS DE FONCTIONS, VECTEURS ET DROITES (2H)

Exercice 1 : 5 points

On considère sur $\mathbb{R}$ la fonction f définie par $\quad f(x) = |2x+1| - |1-x|$.

1. Ecrire $|2x+1|$ et $|1-x|$ sans valeur absolue. En déduire l'expression de f sans valeur absolue.
   On pourra répondre à cette question par un tableau.
2. Représenter f dans un repère orthormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité graphique = 1 cm).
3. Combien d'antécédents 6 possède-t-il par f ?
   On pourra s'aider du graphique, mais on justifiera algébriquement la réponse.

Exercice 2 : 4 points

Déterminer les tableaux de variations de chacune des fonctions suivantes, sur le plus grand ensemble possible, à partir de ceux des fonctions de référence et des théorèmes du cours :

$$g(x) = 3|x| - 4 \qquad h(x) = 5 - 2\sqrt{4-x}$$

Les fonctions de référence sont les fonctions affines, carré, inverse, racine carré et valeur absolue.
On fera apparaitre une ligne par étape dans chaque tableau, mais il est inutile de citer les théorèmes.

Exercice 3 : 4 points

On donne le tableau de variations d'une fonction u :

x	$-\infty$		1		4		6		$+\infty$
Variations de u		↗	0	↗	7	↘	0	↘	
Variations de $\sqrt{u}$									
Variations de $\dfrac{1}{u}$									

Compléter alors les lignes des variations des fonctions $\sqrt{u}$ et $\dfrac{1}{u}$ sur le plus grand ensemble possible.

Exercice 4 : 3 points

On sait qu'une fonction f est un trinôme. On donne de plus le tableau de variations de $|f|$:

x	$-\infty$		-1		2		5		$+\infty$
Variations de $\|f\|$		↘	0	↗	3	↘	0	↗	

Retrouver les deux formes possibles de f sous la forme **factorisée**.

Exercice 5 : 9 points

ABC est un triangle quelconque. Les points N et P sont tels que $\overrightarrow{AN} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BP} = \dfrac{2}{5}\overrightarrow{BC}$.

1. Faire un schéma de la situation.
   On veut montrer de deux manières différentes que les points A, P et N sont alignés.
2. **Solution analytique dans le repère** $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ **:**
   - **a.** Expliquer pourquoi $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ est un repère du plan.
   - **b.** Quelles sont les coordonnées des points A, B, C et N dans ce repère ?
   - **c.** Calculer les coordonnées du point P.
   - **d.** Montrer que les points A, P et N sont alignés.
3. **Solution vectorielle (sans repère, on utilisera donc pas les résultats de la question 2.) :**
   - **a.** Ecrire le vecteur $\overrightarrow{AP}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   - **b.** En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{AP}$, où k est un réel à déterminer.
   - **c.** Expliquer alors pourquoi les points A, P et N sont alignés.

Exercice 6 : 13 points

Le plan est muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$. On considère les points $A(1;2)$, $B(-1;3)$ et $C(4;-1)$.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. **a.** Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).
   b. Donner un vecteur directeur de la droite (AB) d'ordonnée 1.
   c. Trouver le point D de la droite (AB) d'ordonnée 1.
3. **a.** Donner une équation cartésienne de la droite (d) de vecteur directeur $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et passant par le point A.
   b. Le point $E\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{2}\right)$ appartient-il à la droite d ?
4. **a.** Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BE}$.
   b. Que peut-on dire des droites (BE) et (AC) ? Justifier.
5. **a.** Montrer qu'une équation cartésienne de la droite (CE) est $5x + 7y - 13 = 0$.
   b. Calculer les coordonnées du point d'intersection F des droites (AB) et (CE).

Exercice 7 : 2 points

Dans un repère, d est la droite d'équation

$$ax + by + c = 0 \quad \text{avec } (a; b) \neq (0; 0)$$

Expliquer le rôle de l'algorithme ci-contre, dont les variables sont les réels a, b et c.

Algorithme 1 : *Droites*

Début
Saisir a, b, c.
Si ($a \neq 0$) **Alors**
Afficher « Point $A\left(-\dfrac{c}{a}; 0\right)$ » ...
Sinon
Afficher « Pas de point d'intersection. »
Fin Si
Fin