

DEVOIR SURVEILLÉ 2 : VARIABLES ALÉATOIRES

Exercice 1 : Les questions 1 et 2 sont indépendantes

7 points

Dans la ville des chats, chaque chat possède ses souris de compagnie.

On s'intéresse aux événements suivants :

- $I =$ « La souris est de type Ignatz »
- $S =$ « La souris est de type Spiegelman »
- $G =$ « La souris est nourrie au gruyère »

Croquette possède une souris de compétition, de type Ignatz, spécialement nourrie et entraînée pour le saut à la perche.

1. La semaine prochaine, Croquette fait participer sa souris au championnat de saut à la perche de souris, réservé aux souris de type Ignatz et Spiegelman, nourries au gruyère ou avec Royal Mouse.

On sait que :

- 60% des participants seront de type Ignatz
- 80% des souris de type Ignatz sont nourries au gruyère
- 30% des souris de type Spiegelman sont nourries avec Royal Mouse.

- a. Représenter la situation par un arbre pondéré.
- b. Calculer les probabilités $p(S)$, $p(S \cap G)$ et $p(G)$.
- c. En déduire $p(S \cup G)$.
- d. Traduire en une phrase (dans un français correct) l'événement $\overline{S \cup G}$, puis déduire de la question précédente sa probabilité.

2. Croquette possède également deux autres souris, une de type Spiegelman, et une de type Mickey, pour lui tenir compagnie. Il s'en sert également pour entraîner sa souris de type Ignatz au saut à la perche. Le tableau suivant donne la probabilité de gagner de chacune des souris lors d'un saut.

Type	Ignatz	Spiegelman	Mickey
Probabilité	p	p^2	0.04

- a. Déterminer p .
- b. Aujourd'hui, Croquette organise une séance d'entraînement de 4 sauts consécutifs entre ces 3 souris. Quelle est la probabilité que la souris de type Ignatz en remporte au moins un ? *Justifier*

Exercice 2 :

2 points

La roue d'une loterie est divisée en cinq secteurs identiques numérotée de 1 à 5.

On fait tourner la roue n fois et on note X la variable aléatoire égale au rang de la première apparition du numéro 2, ou bien égale à zéro si le 2 n'est pas sorti.

Compléter l'algorithme suivant, qui simule l'expérience :



Algorithme 1 : *Roulette*

Variables

..... sont des nombres entiers

Début

Saisir n

x prend la valeur d'un entier aléatoire de 1 à 5.

j prend la valeur 1.

Tant que (..... et) **Faire**

| x prend la valeur d'un entier aléatoire de 1 à 5

| j prend la valeur $j + 1$

Fin Tant que

Si ($x == 2$) **Alors**

| Afficher « Le numéro 2 est apparu au rang » ...

Sinon

| Afficher « Le numéro 2 n'est pas sorti. »

Fin Si

Fin



Exercice 3 :

11 points

En 1984 en Océania, Winston travaille au ministère de la vérité. Son travail consiste à remanier les archives historiques afin de faire correspondre le passé à la version officielle du parti unique de Big Brother.

La bibliothèque où il travaille contient $n + 5$ archives : 5 à laisser intactes (I) et n à retoucher (R). On a $n \geq 3$. Winston prend tous les jours successivement et sans remise deux archives de la bibliothèque au hasard. Retoucher une archive lui fait perdre 1 souvenir, en laisser une intacte lui permet de retrouver 2 souvenirs. On définit par X la variable aléatoire égale au gain de souvenirs de Winston à la fin d'une journée de travail.

1. Donner une représentation de la situation.
2. Déterminer en fonction de n la loi de probabilité de X . *Justifier par des calculs.*
3. Calculer en fonction de n l'espérance de X .
4. Y a-t-il une valeur de n pour lequel le travail de Winston est équitable pour sa mémoire?
5. Winston sait qu'il ne doit travailler que pour $n \leq 10$ mais il a oublié pourquoi. Pouvez-vous lui expliquer?
On omettra le facteur fainéantise et l'on considère que plus Winston a de souvenirs, mieux c'est pour lui.
6. A partir de maintenant, on sait que $n = 10$.
 - a. Donner alors la loi de probabilité de X , ainsi que son espérance.
 - b. Calculer la variance de X et son écart-type.
7. On a toujours $n = 10$.
Winston se rappelle désormais qu'à chaque fois qu'il va au travail, il gagne deux souvenirs et lorsqu'il revient, il triple son capital acquis dans la bibliothèque. On note Y la nouvelle variable aléatoire égale au gain de souvenirs de Winston à la fin d'une journée de travail.
 - a. Exprimer Y en fonction de X .
 - b. Donner $E(Y)$, $V(Y)$ et $\sigma(Y)$.
 - c. Est-il favorable pour la mémoire de Winston qu'il continue à travailler? Ce travail est-il risqué?