

DEVOIR MAISON 3BIS : VARIATIONS DE FONCTIONS

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 10}$

1. Ecrire le trinôme $x^2 - 6x + 10$ sous forme canonique.
2.
 - a. Soit $h \in \mathbb{R}$. Comparer $f(3 - h)$ et $f(3 + h)$.
 - b. Lorsque h parcourt $\mathbb{R}$, quelle propriété géométrique les points de coordonnées $(3 - h; f(3 - h))$ et $(3 + h; f(3 + h))$ vérifient-ils ?
 - c. Qu'en déduire sur la courbe représentative de f ?
3.
 - a. Montrer que la fonction f est décroissante, puis croissante sur des intervalles que l'on précisera.
On pourra utiliser la propriété géométrique établie à la question 2.c)
 - b. En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
 - c. f admet-elle un minimum ? Si oui, préciser lequel et quand il est atteint.
4. Soit $M \in \mathbb{R}$ tel que $M \geq 1$
 - a. Montrer que l'équation $f(x) = M$ admet une ou deux solutions.
On précisera à quel moment dans les calculs la condition $M \geq 1$ est nécessaire.
 - b. Interpréter en langage courant la proposition :

$$\forall M \geq 1, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) \geq M$$

puis la démontrer.

On pourra s'aider du livre p 18.

- c. Quelle nouvelle information, relative au tableau de variations de la fonction f , cette proposition apporte-t-elle ?
5.
 - a. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - (x - 3) = \frac{1}{f(x) + x - 3}$$
 - b. En déduire que l'affirmation « Le nombre (positif) " $f(x) - (x - 3)$ " peut être rendu aussi petit que l'on veut à condition que x positif soit suffisamment grand » est vraie.
6. Justifier alors les différents éléments graphiques de la représentation graphique ci-dessous, sachant que la courbe représentative de f est tracée en gras.

