DEVOIR MAISON 1 : POLYNÔMES DU SECOND DEGRÉ

Exercice 1 :

On appelle x la longueur du côté le plus petit (avec $x \in \mathbb{N}$).
Les côtés des deux autres carrés sont donc $x+1$ et $x+2$.
La somme des aires des carrés est alors $A = x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 = 3x^2 + 6x + 5$.
Ainsi, on cherche à résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation :

$$3x^2 + 6x + 4 = 15\,125 \iff 3x^2 + 6x - 15120 = 0$$

On trouve alors $\Delta = 6^2 - 4 \times 3 \times 15120 = 181\,476 = 426^2$.

D'où $x_1 = \dfrac{-6-426}{6} = -216$ et $x_2 = \dfrac{-6+426}{6} = 210$ sont solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$.
Il existe donc une unique solution dans $\mathbb{N}$, à savoir $x = 210$.
Les trois carrés ont pour longueur de côté 210, 211 et 212.

On procède de même pour une aire égale à 15 127. Ceci revient donc à résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation

$$3x^2 + 6x - 15122 = 0$$

Mais dans ce cas, on trouve que $\Delta = 181\,500$, ce qui n'est pas un carré parfait.
Les solutions ne seront donc pas entières et il n'y a pas de solution au problème posé.

Exercice 2 :

On pose x et y ces deux nombres. On sait que x et y sont strictement positifs et qu'ils vérifient le système :

$$(S) : \begin{cases} x + y = 57 \\ xy = 540 \end{cases}$$

On résout ce système par substitution. On a alors :

$$(S) \iff \begin{cases} x + y = 57 \\ x = \dfrac{540}{y} \quad (y \neq 0) \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{540}{y} + y = 57 \\ x = \dfrac{540}{y} \end{cases} \iff \begin{cases} 540 + y^2 = 57y \quad (y \neq 0) \\ x = \dfrac{540}{y} \end{cases} \iff \begin{cases} y^2 - 57y + 540 = 0 \\ x = \dfrac{540}{y} \end{cases}$$

On résout la première équation. On trouve $\Delta = 1\,089 = 33^2$.

Ainsi $y_1 = \dfrac{57+33}{2} = 45$ et $y_2 = \dfrac{57-33}{2} = 12$.

On en déduit $x_1 = \dfrac{540}{45} = 12$ et $x_2 = \dfrac{540}{12} = 45$. Les nombres cherchés sont donc 12 et 45.

Remarque : Comme les rôles de x et y sont symétriques, il est normal que l'on retrouve les deux solutions de l'équation de degré 2.

Exercice 3 :

On pose x et y les longueurs des deux autres côtés du triangle rectangle. On sait que x et y sont strictement positifs et qu'ils vérifient le système :

$$(S) : \begin{cases} x^2+y^2 = 72.5^2 \\ \dfrac{xy}{2} = 429 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+y^2 = 5256.25 \\ xy = 858 \end{cases}$$

On résout ce système par substitution. On a alors :

$$(S) \iff \begin{cases} x^2+y^2 = 5256.25 \\ x = \dfrac{858}{y} \quad (y \neq 0) \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{736164}{y^2} + y^2 = 5256.25 \\ x = \dfrac{858}{y} \end{cases} \iff \begin{cases} 736164 + y^4 = 5256.25y^2 \quad (y^2 \neq 0) \\ x = \dfrac{858}{y} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y^4 - 5256.25y^2 + 736164 = 0 \\ x = \dfrac{858}{y} \end{cases}$$

La première équation est une équation bicarré. On pose alors $Y = y^2$ et on est ramené à résoudre :

$$Y^2 - 5256.25Y + 736164 = 0$$

On trouve $\Delta = (4968.25)^2$. Donc $Y_1 = \dfrac{5256.25 - 4968.25}{2} = 144 = 12^2$ et $Y_2 = 5112.25 = 71.5^2$.
Comme $y > 0$ on trouve alors $y_1 = 12$ et $y_2 = 71.5$.
Les rôles de x et y étant symétriques, on a en fait $x_1 = 71.5$ et $x_2 = 12$ ce qui se vérifient facilement sur la deuxième équation de (S).
Ainsi, le périmètre du triangle rectangle est $P = 12 + 71.5 + 72.5 = 156\,\text{m}$.

Exercice 4 : L'infini

1. **a.** $10a = 9,\underline{9} = 9 + 0,\underline{9} = 9 + a$

   b. On résout l'équation ci-dessus. On a : $10a = 9 + a \iff 9a = 9 \iff a = 1$.
   Ainsi $0,\underline{9} = 1$.

2. **a.** $x^2 = x + 1 \iff x^2 - x - 1 = 0$.
   On trouve $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5$ et donc $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$ et $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$

   b. On pose $a = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}}$.
   Alors $a^2 = 1 + \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}} = 1 + a$.
   Or on sait que $a > 0$ donc a est la solution positive de l'équation $x^2 = 1 + x$. D'où $a = \Phi$.

   c. On sait que $\Phi^2 = \Phi + 1 \iff \Phi = 1 + \dfrac{1}{\Phi}$ car $\Phi \neq 0$.

   d. $1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{\Phi}}} = 1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{\Phi}} = 1 + \dfrac{1}{\Phi} = \Phi$ puisque $1 + \dfrac{1}{\Phi} = \Phi$.