DEVOIR SURVEILLÉ 6 : CORRECTION

Exercice 1 : 3 points

S_1 est la **somme** des n premiers entiers naturels avec $n = 2012$. Donc

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + \cdots + 2011 + 2012 = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{2012 \times 2013}{2}$$

S_2 est la **somme des n premiers termes de la suite** géométrique (u_n) de raison $q = 3$ et de premier terme $u_0 = 7$.
Recherchons n : on sait que pour tout $n \geq 0$ on a $u_n = u_0 \times 3^n = 7 \times 3^n$. En particulier :

$$7 \times 3^n = 45927 \iff 3^n = 6561$$

Avec un tableau de valeurs à la calculatrice, on trouve $3^8 = 6561$ donc $n = 8$. On a alors :

$$S_2 = 7 + 21 + 63 + \cdots + 45\,927 = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = 7 \times \frac{1 - 3^9}{1 - 3}$$

Exercice 2 : 4 points

1. Sur le dessin on compte $u_3 = 8$ et $u_4 = 11$.

2. La suite (u_n) semble être une suite arithmétique de raison $r = 3$ et de premier terme $u_1 = 2$.

3. **a.** On cherche n tel que $u_n = 23$. Or on sait que pour tout $n \geq 1$ on a $u_n = u_1 + (n-1)r$.
En particulier :

$$23 = 2 + 3(n-1) \iff 21 = 3n - 3 \iff 24 = 3n \iff n = 8$$

Le château aura donc 8 étages.

b. On appelle S_8 le nombre de cartes d'un château à 8 étages. On a alors :

$$S_8 = \sum_{k=1}^{8} u_k = 8 \times \frac{u_1 + u_8}{2} = 8 \times \frac{2 + 23}{2} = 100$$

Le château aura 100 cartes.

Exercice 3 : 4 points

1. On sait que pour tout $n \geq p \geq 0$ on a $u_n = u_p + (n-p)r$. En particulier on a :

$$u_{34} = u_{20} + (34 - 20) \times r \iff -18 = 10 + 14r \iff r = -2$$

De plus on sait que pour tout $n \geq 0$ on a $u_n = u_0 + nr$. En particulier on a :

$$u_{20} = u_0 + 20r \iff 10 = u_0 + 20 \times (-2) \iff u_0 = 50$$

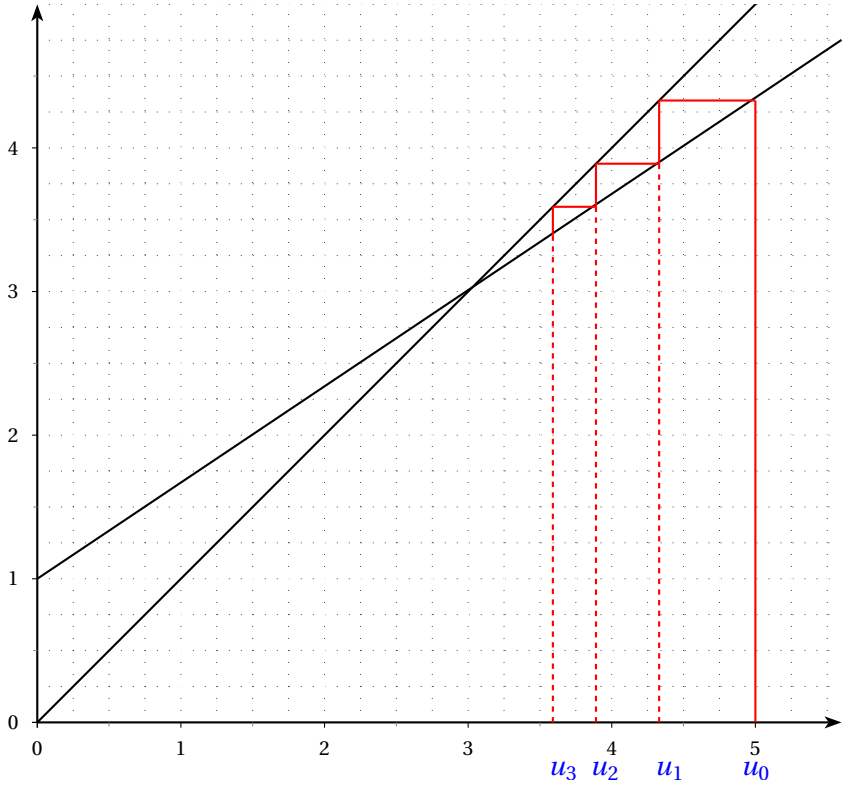
2. On a $S = u_{50} + u_{51} + \cdots + u_{100} = 51 \times \frac{u_{50} + u_{100}}{2}$.
Or $u_{50} = u_0 + 50r = 50 + 50 \times (-2) = -50$ et $u_{100} = u_0 + 100r = 50 + 100 \times (-2) = -150$.
Donc $S = 51 \times \frac{-50 - 150}{2} = -5100$.

Exercice 4 : 4 points

1. (u_n) : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + 1 \end{cases}$

Dans un repère orthonormé, on trace :
- la droite Δ : $y = x$
- la courbe représentative de la fonction f définissant par récurrence la suite (u_n), à savoir la droite d'équation $y = \dfrac{2}{3}x + 1$.

Ensuite on place u_0 sur l'axe des abscisses.
Puis u_1 l'image de u_0 par f, que l'on reporte sur l'axe des abscisses grâce à la droite Δ, etc.



2. Cette suite semble converger vers l'abscisse du point d'intersection des deux droites, à savoir 3.
Par le calcul, la limite ℓ de la suite vérifie l'équation $\ell = \dfrac{2}{3}\ell + 1 \iff \dfrac{1}{3}\ell = \iff \ell = 3$.

Exercice 5 : 5 points

1. **a.** On a $C_1 = C_0 - 20 + \dfrac{4}{100}(C_0 - 20) = (C_0 - 20) \times 1.04$.
De même $C_2 = C_1 - 20 + \dfrac{4}{100}(c_1 - 20) = (C_1 - 20) \times 1.04$.

b. Pour tout $n \geq 0$ on a $C_{n+1} = C_n - 20 + \dfrac{4}{100}(c_n - 20) = (C_n - 20) \times 1.04 = 1.04C_n - 20.8$.

2. **a.** $\forall n \geq 0$ on a $u_{n+1} = C_{n+1} - 520 = 1.04C_n - 20.8 - 520 = 1.04C_n - 540.8 = 1.04(C_n - 520) = 1.04u_n$.
Donc (u_n) est géométrique de raison $q = 1.04$ et de premier terme $u_0 = 9480$.

b. On sait alors que pour tout $n \geq 0$ on a $u_n = u_0 \times q^n = 9480 \times 1.04^n$.
Comme $C_n = u_n + 520$ on a $C_n = 9480 \times 1.04^n + 520$.

3. A l'aide d'un tableau de valeurs dans lequel on rentre la fonction $\boxed{Y = 9480 \times 1.04\text{^}X + 520}$ (ou la suite $\boxed{u(n) = 9480 \times 1.04\text{^}n + 520}$), on trouve que le capital aura doublé au bout de 19 années minimum, car $u_{18} < 20\,000$ et $u_{19} > 20\,000$.

Exercice 6 : 2 points

1. $u_n = n^2 - n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Alors $u_{n+1} = (n+1)^2 - (n+1) = n^2 + 2n + 1 - n - 1 = n^2 + n$.
Donc $u_{n+1} - u_n = n^2 + n - (n^2 - n) = 2n \geq 0$ pour tout $n \geq 0$. Donc la suite (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}$.

2. $v_n = \dfrac{2^n}{n}$ pour $n \geq 2$. Tous les termes de (v_n) sont de même signe, donc $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{2^{n+1}}{n+1} \times \dfrac{n}{2^n} = \dfrac{2n}{n+1}$.
Pour $n \geq 2$ on a clairement $2n = n + n > n + 1$ donc $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} > 1$ et la suite (v_n) est strictement croissante.