Devoir Surveillé 5 : Correction (1h)

Exercice 1 : 3 points

1. On a le tableau de proportionnalité suivant :

Radians	π	$\frac{\pi}{5}$	
Degrés	180		230

Donc $\frac{\pi}{5} rad = \frac{\frac{\pi}{5}\times 180}{\pi} = \frac{180}{5} = 36°$.

2. Et $230° = \frac{230\times\pi}{180} = \frac{23\pi}{18}$. Or $\pi < \frac{23\pi}{18} < 2\pi \iff -\pi < \frac{23\pi}{18} - 2\pi < 0$.
La mesure principale de cet angle est $\frac{23\pi}{18} - 2\pi = -\frac{13\pi}{18}$

Exercice 2 : 4 points

2. ABC est un triangle rectangle isocèle direct donc $(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}) = \left(\pi - \frac{\pi}{2}\right)\times\frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}\quad[2\pi]$.
Comme (CD) est la bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA})$, on a de suite

$$(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD}) = \frac{1}{2}\times(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA}) = -\frac{1}{2}\times(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}) = -\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{8}\quad[2\pi]$$

3. Dans le triangle direct DBC on a : $(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CB}) = -(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD}) = \frac{\pi}{8}\quad[2\pi]$
et ABC est rectangle isocèle direct donc $(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BD}) = (\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{4}\quad[2\pi]$.
Donc $(\overrightarrow{DB};\overrightarrow{DC}) = \pi - \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{8}\quad[2\pi]$.

4.

$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{DC}) &= (\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC};\overrightarrow{DC}) && \text{D'après la relation de Chasles}\\
&= (\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD}) && \text{car } (-\vec{u};-\vec{v}) = (u;v)\quad[2\pi]\\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8}\quad[2\pi]\\
&= \frac{\pi}{8}\quad[2\pi]
\end{aligned}$$

Exercice 3 : 4 points

1. On sait d'après le cercle trigonométrique que

$$\sin(\pi - x) = \sin(x)\quad,\quad \sin(-x) = -\sin(x)\quad \text{et}\quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$$

Donc $A = \sin(x) + \sin(x) + \cos(x) = 2\sin(x) + \cos(x)$

2. **a.** $\frac{7\pi}{5} = \frac{2\pi}{5} + \pi$. Or d'après le cercle trigonométrique, on a $\cos(x+\pi) = -\cos(x)$.
Donc $\cos\left(\frac{7\pi}{5}\right) = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$.

b. On sait que pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \iff \sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$.
Or $\cos^2\left(\frac{7\pi}{5}\right) = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^2 = \frac{1 - 2\times 1\times\sqrt{5} + 5}{16} = \frac{6 - 2\sqrt{5}}{16} = \frac{3-\sqrt{5}}{8}$.

Donc $\sin^2\left(\frac{7\pi}{5}\right) = 1 - \frac{3-\sqrt{5}}{8} = \frac{8-3+\sqrt{5}}{8} = \frac{5+\sqrt{5}}{8}$ CQFD.

c. On sait que le $\sin\left(\frac{7\pi}{5}\right) < 0$ car $\pi < \frac{7\pi}{5} < 2\pi$. Donc $\sin\left(\frac{7\pi}{5}\right) = -\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$

Exercice 4 : 9 points

1. **a.** Sur le cercle trigonométrique, on voit que les solutions de cette équation dans $]-\pi;\pi]$ sont $-\frac{\pi}{7}$ et $\frac{\pi}{7}$.

b. L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ est $S = \left\{\pm\frac{\pi}{7} + 2k\pi\,;\ \text{avec } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

D'après le cercle trigonométrique, l'ensemble des solutions sur $[0;2\pi[$ est $S = \left\{\frac{\pi}{7};\frac{13\pi}{7}\right\}$.

2. **a.** $\cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \iff \cos(x) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ d'après le cercle trigonométrique.

Donc les solutions de cette équation sur $]-\pi;\pi]$ sont $-\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$.

b. L'ensemble des solutions de cette inéquation sur $]-\pi;\pi]$ est donc $S = \left]-\frac{3\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right[$.

c. L'ensemble des solutions de cette inéquation sur $]-2\pi;3\pi]$ est donc

$$S = \left]-2\pi;-\frac{5\pi}{4}\right[\cup \left]-\frac{3\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{4};\frac{11\pi}{4}\right[$$

3. **a.** On demande au logiciel de trouver les mesures principales des angles x tels que $2sin(x)^2 - sin(x) - 1 = 0$.

b. On pose $X = \sin(x)$.

On doit donc résoudre d'abord $2X^2 - X + 1 = 0$.

$\Delta = (-1)^2 - 4\times 2\times(-1) = 1+8 = 9$ D'où $X_1 = \frac{-(-1)+\sqrt{9}}{2\times 2} = 1$ et $X_2 = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}$. On cherche alors les x tels que $\sin(x) = 1$ ou $\sin(x) = -\frac{1}{2}$.

La solution sur $]-\pi;\pi]$ de $\sin(x) = 1$ est $x = \frac{\pi}{2}$.

Et $\sin(x) = -\frac{1}{2} \iff \sin(x) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$. Donc les solutions sur $]-\pi;\pi]$ de cette équation sont $-\frac{5\pi}{6}$ et $-\frac{\pi}{6}$ d'après le cercle trigonométrique.

Au final, le logiciel renvoit les nombres $-\frac{5\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{2}$.