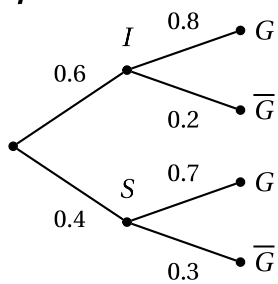
DEVOIR SURVEILLÉ 2 : VARIABLES ALÉATOIRES

Exercice 1 : *Les questions 1 et 2 sont indépendantes* **7 points**

1. a.



b.

$$p(S) = 1 - P(I) = 0.4 \qquad p(S \cap G) = 0.4 \times 0.7 = 0.28 \qquad p(G) = 0.6 \times 0.8 + 0.28 = 0.76$$

c. $p(S \cup G) = p(S) + p(G) - p(S \cap G) = 0.4 + 0.76 - 0.28 = 0.88$

d. $S \cup G =$ « La souris n'est pas de type S *et* n'est pas nourrie au gruyère »
ou encore « La souris est de type I et est nourrie avec Royal Mouse »
On a $p(\overline{S \cup G}) = 1 - p(S \cup G) = 0.12$

2. a. On sait que $p + p^2 + 0.04 = 1 \iff p^2 + p - 0.96 = 0$
Or $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-0.96) = 1 + 3.84 = 4.84 = 2.2^2$
Donc les solutions de cette équation sont $p_1 = \dfrac{-1-2.2}{2} < 0$ donc impossible ici,
et $x_2 = \dfrac{-1+2.2}{2} = 0.6$.
On a alors $p = 0.6$. On vérifie : $p + p^2 + 0.04 = 0.6 + 0.36 + 0.04 = 1$.

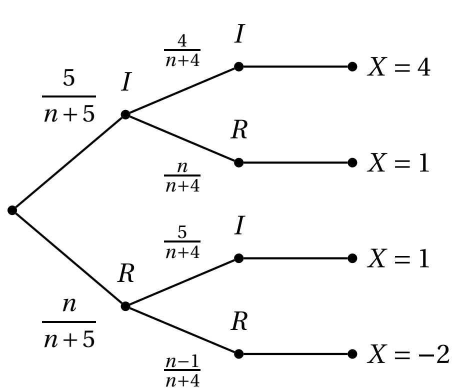
b. On appelle A l'événement « La souris de type Ignatz remporte un saut « et B l'événement demandé.
L'événement contraire de celui demandé est $\overline{B} =$ « La souris de type Ignatz ne remporte aucun saut ».
On peut imaginer un arbre contenant à chaque étape A de probabilité 0.6 et $\overline{A}$ de probabilité 0.4. On a donc $p(\overline{B}) = (0.4)^4$ et $p(B) = 1 - p(\overline{B}) = 1 - 0.4^4 = 1 - 0.0256 = 0.9744$

Exercice 2 : **2 points**

Voir votre copie

Exercice 3 : **11 points**

1.



2. $p(X=4)=\dfrac{5}{n+5}\times\dfrac{4}{n+4}=\dfrac{20}{(n+5)(n+4)}$

$$p(X=-2)=\frac{n}{n+5}\times\frac{n-1}{n+4}=\frac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)} \qquad p(X=1)=2\times\frac{5}{n+5}\times\frac{n}{n+4}=\frac{10n}{(n+5)(n+4)}$$

On a donc le tableau :

x_i	-2	1	4
$p(X=x_i)$	$\dfrac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}$	$\dfrac{10n}{(n+5)(n+4)}$	$\dfrac{20}{(n+5)(n+4)}$

3. $E(X)=-2\times\dfrac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}+1\times\dfrac{10n}{(n+5)(n+4)}+4\times\dfrac{20}{(n+5)(n+4)}=\dfrac{-2n^2+12n+80}{(n+5)(n+4)}$

4. On cherche une valeur qui annule $E(X)$, ie telle que $-2n^2+12n+80=0$.
On a $\Delta=144+640=784=28^2$.
On trouve $n_1=\dfrac{-12-28}{-4}=10$ et $n_2=\dfrac{-12+28}{-4}=-4<0$ donc impossible.
Donc le travail est équitable pour $n=10$.

5. Winston ne doit travailler que lorsque $E(X)\geq 0$. On $E(X)$ est du signe de $-2n^2+12n+80$ car son dénominateur est positif.
0r cette expression est positive pour $-4\leq n\leq 10$.

6. **a.**

x_i	-2	1	4
$p(X=x_i)$	$\dfrac{90}{210}$	$\dfrac{100}{210}$	$\dfrac{20}{210}$

Et on sait déjà que $E(X)=0$, d'après la question 4.

b. $V(X)=(-2)^2\times\dfrac{90}{210}+1^2\times\dfrac{100}{210}+4^2\times\dfrac{20}{210}-0^2=\dfrac{360+100+320}{210}=\dfrac{780}{210}=\dfrac{26}{7}$
et $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}\simeq 1.9$.

7. **a.** $Y=3X+2$

b.

$$E(Y)=3E(X)+2=2 \qquad V(Y)=3^2V(X)=9\times\frac{26}{7}=\frac{234}{7} \qquad \sigma(Y)=\sqrt{V(Y)}=3\sigma(X)\simeq 5.7$$

c. L'espérance est positive, donc Winston peut continuer à travailler, par contre, l'écart-type est important comparé à l'espérance, donc ce travail est risqué.