DEVOIR MAISON 4 : CORRECTION DU N° 108 P 338 (VECTEURS)

Partie A :

1. Les vecteurs $\overrightarrow{GS}$ et $\overrightarrow{GL}$ sont de même direction et de sens contraire, car les points S, G et L sont alignés dans cet ordre.
2. On sait que l'on doit avoir $m_S \times GS = m_L \times GL$ et comme $\overrightarrow{GS}$ et $\overrightarrow{GL}$ sont colinéaires, de sens contraire, on peut affirmer que :
$$m_S \times \overrightarrow{GS} = -m_L \times \overrightarrow{GL} \iff m_S\overrightarrow{GS} + m_L\overrightarrow{GL} = \vec{0}$$
3. On a donc
$$\begin{aligned} m_S\overrightarrow{GS} + m_L\overrightarrow{GL} = \vec{0} &\iff m_S\overrightarrow{GS} + m_L\left(\overrightarrow{GS} + \overrightarrow{SL}\right) = \vec{0} \\ &\iff (m_S + m_L)\overrightarrow{GS} + m_L\overrightarrow{SL} = \vec{0} \\ &\iff (m_S + m_L)\overrightarrow{GS} = -m_L\overrightarrow{SL} \\ &\iff (m_S + m_L)\overrightarrow{SG} = m_L\overrightarrow{SL} \\ &\iff \overrightarrow{SG} = \frac{m_L}{m_S + m_L}\overrightarrow{SL} \qquad (\bigstar) \end{aligned}$$
On a $\overrightarrow{SG} = k\overrightarrow{SL}$ avec $k = \dfrac{m_L}{m_S + m_L}$ unique, ainsi que $\overrightarrow{SL}$.
Donc il existe une unique position pour le point G pour laquelle l'équilibre est assuré.
4. Si $m_S = m_L$, le point G est situé au milieu de $[SL]$.
Ce résultat est connu et évident, mais on peut le redémontrer grâce à la relation $(\bigstar)$ ci-dessus :
$$(\bigstar) \iff \overrightarrow{SG} = \frac{m_L}{m_L + m_L}\overrightarrow{SL} \iff \overrightarrow{SG} = \frac{m_L}{2m_L}\overrightarrow{SL} \iff \overrightarrow{SG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SL}$$
5. Si $m_S = 30$ g et $m_L = 10$ g, alors :
$$(\bigstar) \iff \overrightarrow{SG} = \frac{10}{30+10}\overrightarrow{SL} \iff \overrightarrow{SG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{SL}$$
Donc G est situé à un quart du segment $[SL]$ en partant du point S.

Partie B :

1.
$$\begin{aligned} m_E\overrightarrow{GE} + m_S\overrightarrow{GS} + m_L\overrightarrow{GL} = \vec{0} &\iff m_E\overrightarrow{GE} + m_S\left(\overrightarrow{GE} + \overrightarrow{ES}\right) + m_L\left(\overrightarrow{GE} + \overrightarrow{EL}\right) = \vec{0} \\ &\iff (m_E + m_S + m_L)\overrightarrow{GE} = -m_S\overrightarrow{ES} - m_L\overrightarrow{EL} \\ &\iff (m_E + m_S + m_L)\overrightarrow{EG} = m_S\overrightarrow{ES} + m_L\overrightarrow{EL} \\ &\iff \overrightarrow{EG} = \frac{m_S}{m_E + m_S + m_L}\overrightarrow{ES} + \frac{m_L}{m_E + m_S + m_L}\overrightarrow{EL} \end{aligned}$$
Comme $\overrightarrow{EG} = a\overrightarrow{ES} + b\overrightarrow{EL}$ avec a et b des réels uniques et que les vecteurs $\overrightarrow{ES}$ et $\overrightarrow{EL}$ sont également uniques, il existe une unique position pour le point G possible.

On peut constater qu'elle ne correspond pas à celle du dessin, car G n'est pas sur le segment $[SL]$.
En fait G l'est l'endroit on l'on doit accrocher le mobile, non pas pour qu'il soit à la verticale, comme sur le dessin, mais à l'horizotale.

Ici il sera forcément forcément à l'intérieur du triangle SLE, car les masses (donc les coefficients) sont positives. Mais on rencontrera des cas où les coefficients ne seront pas des masses, et pourront être négatifs. Le point G ne sera alors pas forcément à l'intérieur du triangle...

2. Si $m_S = m_L = m_E$.

a. On obtient alors :

$$(1) \iff m_E\overrightarrow{GE} + m_E\overrightarrow{GS} + m_E\overrightarrow{GL} = \vec{0} \iff \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GS} + \overrightarrow{GL} = \vec{0}$$

b. Si I est le milieu du segment $[SL]$ alors $\overrightarrow{SI} = \overrightarrow{IL} \iff \overrightarrow{IS} = -\overrightarrow{IL}$ et on a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GS} + \overrightarrow{GL} = \vec{0} &\iff \overrightarrow{GE} + \left(\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IS}\right) + \left(\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IL}\right) = \vec{0} \\
&\iff \overrightarrow{GE} + 2\overrightarrow{GI} - \overrightarrow{IL} + \overrightarrow{IL} = \vec{0} \\
&\iff \overrightarrow{GE} + 2\overrightarrow{GI} = \vec{0} \\
&\iff \overrightarrow{GE} + 2\left(\overrightarrow{GE} + \overrightarrow{EI}\right) = \vec{0} \\
&\iff 3\overrightarrow{GE} + 2\overrightarrow{EI} = \vec{0} \\
&\iff 3\overrightarrow{GE} = -2\overrightarrow{EI} \\
&\iff 3\overrightarrow{EG} = 2\overrightarrow{EI} \\
&\iff \overrightarrow{EG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EI}
\end{aligned}$$

c. Le point G est alors au deux tiers du segment $[EI]$ en partant du point E.
Comme $[EI]$ est la médiane issue de E du triangle SEL (I est le milieu du côté $[SL]$), le point G est le centre de gravité du triangle SEL.